

多目的GAによる座屈荷重係数を目的関数とするラチスシェル構造物の形状最適化に関する研究

著者	大竹 美智子
著者別名	OHTAKE Michiko
その他のタイトル	Shape optimization of latticed shell structures for liner buckling load factor by SPEA2
発行年	2010-03-24
学位授与年月日	2010-03-24
学位名	修士(工学)
学位授与機関	法政大学 (Hosei University)
URL	http://hdl.handle.net/10114/7794

P377.5
M35-2
2009-9

多目的GAによる座屈荷重係数を目的関数とする
ラチスシェル構造物の形状最適化に関する研究

Shape Optimization of Latticed Shell Structures
for Linear Buckling Load Factor by SPEA2

08R5309

大竹 美智子

法政大学 大学院工学研究科 建設工学専攻
指導 佐々木睦朗 教授

2009 年度修士論文



Shape Optimization of Latticed Shell Structures for Linear Buckling Load Factor by SPEA2

Michiko OTAKE

INTRODUCTION ;

In late years, a form is complicated freely, and, aiming at the breakaway from modern architecture represented by Le Corbusier. It is it with the theme that new building structure to have a characteristic such as the indeterminate, form is international, and is contemporary. On designing the structure, there is a two type a constituent of the structure body, consisting of the element of a continuum represented to a structure by a film or a flat board, and consisting of the element of a disintegration body expressed by truss and a frame. Though a research of structural form optimization studied flourishingly, the true structure which is composed of the disintegration element is not realized. As the reason, as for the topologies and the issue of placement of standardized steel materials, it is returned to the issue of integer plan by the disintegration variable, and the point that It is not able to use optimization technique with the sensitivity of the quantity of physics for is raised. When I let a structure reach collapse without showing the strength that structure materials last depending on the structure form enough, this buckling phenomenon is raised as an important factor because there is a lot of it when I examine the safety of the structure.

The buckling behavior of the space structure depends on the geometric dimensions, shape greatly. On this account, in the initial stage of the design to decide structure shape, I examine high structure shape of the stability, and it is thought that it is effective to choose.

I shall aim at the structure design technique that was considered for a true design by considering a linear shape buckling load coefficient more than I possessed structure stability for a rational structure provided than a past study by the main subject.

The paper is composed of 4 chapters.

Chapter1 – Introduction

Chapter2 – A theory of the combinatorial optimization and by gones study and
Evaluation of Fitness using Genetic Algorithms

Chapter3 – The shape optimization of the latticed shell structure

Chapter4 – Conclusion

ANALYSIS ;

■Fitness

In structural optimization problem of disintegration variable, object function is written as a formula (1). Structure's weight, A linear buckling load factor and compliance is able to express formula (1),(2) and (3).Fitness which is used in GA written as a formula (4).

$$.Minimize \quad \quad \quad Object(x,A) \quad (1)$$

$$f(x, A) = \frac{1}{\mu} \quad (2)$$

$$W(x,A) = \sum_i^M l_i A_i \rho_i \quad (3)$$

$$U(\mathbf{r}, A) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T(\mathbf{r}) \mathbf{K}(\mathbf{r}, A) \mathbf{d}(\mathbf{r}) \quad (4)$$

$$fitness = \frac{1}{Object(x,A)} \prod_i \gamma_i \quad (5)$$

Aimed at maximizing Buckling Load on considering the total buckling of the lacing shell. I pay my attention to linear shape buckling load to evaluate by linear eigen_ value analysis in defiance of transformation in this study before buckling approximately(Expression (6)). Linear buckling load P is defined in Expression (7). The first μ_c is a linear buckling load coefficient, and it is the equilateral minimum of linear buckling load coefficient μ provided from the issue of general eigen_value. Set a purpose function in this primary linear buckling load coefficient μ_c in this study and decide to consider the stability of the structure by maximizing this.

$$([K_L] + \mu[K_G])\phi = 0 \quad (6)$$

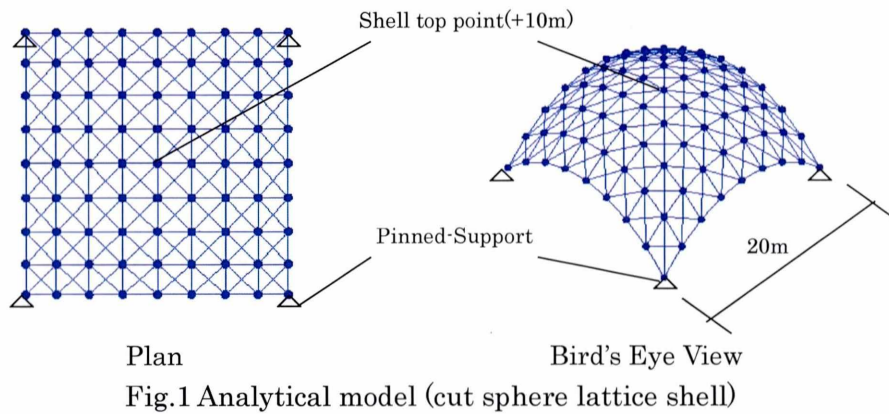
$[K_L]$: hardness matrix , $[K_G]$: geometry hardness matrix ,
 μ : linear buckling load factor , ϕ : linear buckling mode ,

$$P = \mu_c P_0 \quad (7)$$

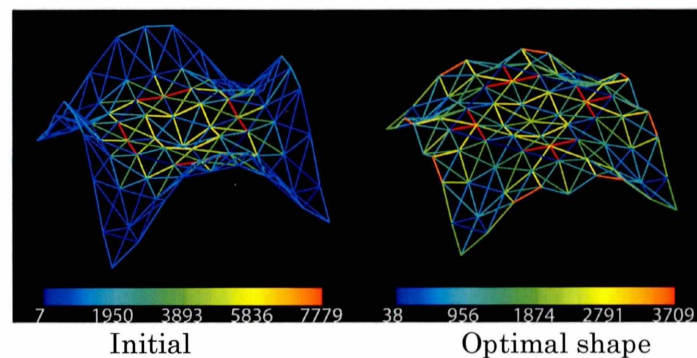
P_0 : Standard load , μ_c : The first linear buckling load factor

■Analytical Model

Examine for the issue of maximization of the linear buckling load coefficient of the lacing shell structure. I assume a variable a member section and show a numerical analysis result when I triggered the load that accepted a rule area every When I cover it with a bed lacing shell of the cutting ball husk shape to own the pin support in span 20m *20m, rye 10m, the corners-cut square part as an analysis model, I am available and think. I show grand structure in Fig.1 In addition, the joining of the member did the point that I made span division into 8 with rigid in a panel point as a panel point and assumed that the member which I intersected in the whole figure any place other than a panel point, and was seen was not joined. The use member assumed it four kinds of circular steel tubes.



■Result



CONCLUSION ;

This paper presents the structure optimization method using GA.

The result is confirm the shape that bent generally. Shape is to revise it and can guess this like shingle board structure when I prevent that I do buckling for load. In addition, it is thought that, as a whole, I secure stability as the structure body by keeping the rye of the shell low. I refer to Chapter 3 of this article about other exercises and the details.

第1章 序論

1.1 研究の背景

建築デザインと構造デザインの融合は、時代にかかわらず、建築の根源的な問題である。現代の構造デザインの原動力は高度に進歩した計算機環境と解析技術の発展にある。コンピュータの飛躍的進歩に伴い大容量高速解析が可能となり、構造物の解析対象領域も飛躍的に拡大され、さらに、加工、施工技術の進歩も相まって、これまで手をつけることができなかった複雑で不定形な構造物の実現を可能にするほどに、現代の技術は成熟した時代を迎えている。しかし、現代の構造は必ずしも力学的に合理的なものばかりとはいえず、建築家の求める説得力のない恣意的で不合理な形態をそのまま無理に補剛したり、厚みを持たせる等して、力学的に解決する例も多く見られる。

その中で、近年構造力学を理論的背景とした形態決定に関する一連の研究である構造形態創生に注目が集まっている。構造物の形態は形（幾何学的な形状）と態（力学的挙動）から成り立っており、その形状と構造体の力学的挙動は不可分な関係にあり、構造形態創生は力学法則に基づき、数学的手続きにより、形と態を考慮した目的達成のための合理的で組織的な作業である。

近年数多く報告されている現在の形態創生手法の中で、佐々木の提案した感度解析手法と進化論的構造最適化手法はマンマシン・インターフェイスによる構造的合理性と設計者の価値判断（感性）を伴ったデザイン手法であり、実設計に取り入れられ、自由で流動的な建築を生み出している。最適化理論に人間の感性を介入させ、新しい形態でかつ合理的であるその建築はまた新たな建築スタイルへの布石となり、逃れられずにいる近代建築の潮流からの脱却をし、より自由な建築を生み出してくれるであろう。

1.2 既往の研究

不安定性を考慮に入れた初期の研究として1952年のFeigen⁵⁸⁾の研究が挙げられる。軸圧縮力を受ける両端にテーパのついた筒状柱に対し、座屈を制約として最小重量設計問題を解析的に検討している。そこでは、Shanley⁵⁹⁾による同時崩壊モード設計(simultaneous failure mode approach)に基づいて、全体座屈とシェル型の局部座屈と材料降伏が同時に起こる際の形状について検討している。また、Zyczkowski, Kruzelecki⁶⁰⁾は、シェルの純曲げを受ける筒状シェルの座屈荷重が最大となる断面形状を解析的に求めている。これらの古典的な研究では、座屈荷重は陽に表現された近似式が用いられている。軸圧縮力を受けるソリッドな柱の座屈荷重を最大とする形状はTadjbakhsh, Keller⁶¹⁾によって示された。その後、Olhoff, Rasmussen⁶²⁾によって、両端固定とした柱では最適解で座屈荷重の重複が生じることが指摘された。座屈荷重の最適化問題では、あるモードの座屈荷重を上昇させると、他のモードの座屈荷重が下降し、最適解で複数のモードの座屈荷重が重複する傾向にある。この傾向は問題を複雑にし、最適解を求め難いものにする。

Solodovnikov⁶³⁾は線形座屈荷重と線形座屈時の応力を制約条件として軸対称シェルの最小重量問題を解いている。最適化アルゴリズムは勾配法に基づいているが、座屈荷重の重複に対しては特別な考慮は必要なかったと述べられている。等加速度運動により生じる慣性力を受ける境界固定支持のシェルの解析例では、曲げモーメント分布が小さくなる結果が示されている。Plaut, Olhoff⁶⁴⁾はアーチの長さを一定とする条件のもとで、非線形座屈荷重を最大とする扁平アーチの形状を解析的に求めている。最適形状は境界を固定とした場合、境界付近で傾きが零となる結果が示されている。また、この問題では座屈荷重の重複は生じないことも示されている。Plaut, Johnson⁶⁵⁾は非線形座屈荷重を最大とする扁平軸対称シェルの形状を最適性基準法により求めている。最適形状は境界を固定とした場合、アーチの場合と同様に境界付近で傾きが零となる結果が示されており、座屈荷重は球形シェルと比べて最大で110%上昇する結果が示されている。座屈荷重の重複を考慮した定式化は行っておらず、得られた解では重複を生じていないが、厳密な解では重複するであろうと予測している。

1.3 研究の目的と方法

建築物における構造要素は次の連続型と離散型の2種類に大別できる。連続型の構造要素としては梁、棒、柱、平板、膜、シェル、三次元体などがある。離散型の構造要素としてはトラス、フレーム、ラチス、テンセグリティ構造、ケーブル構造などがある。離散型は構造要素（部材）を連結して構成したもので、接合部と結合関係（位相）によって特徴付けられる。

現在、連続型構造要素で構成される構造物において、佐々木により自由曲面シェル(Fig.1.1)と拡張ESO法(Fig.1.2)を用いた構造形態創生手法の実設計への適用事例が報告されているが、離散型構造要素で構成される構造物に関して、部材や位相を離散変数として扱い、構造形態創生手法として実設計へ応用された例はあまり見られない。その背景として、離散変数は変数の微分が不可能であるため感度解析などの物理量の感度勾配を用いて最適化する手法を用いることが出来ず、組合せ問題を解く手法によって最適化を行う必要がある。しかし、組合せ最適化では変数の爆発的な増加が古くから知られ、単純な二次元平面問題や規模の小さい三次元問題のみを扱うことが限界であると考えられている。そのため、近年求められる不定形や自由度の高い形態を表現する手法としては発展途上の分野であると言え、設計でそれらの手法は実用化の見当が付いていないと言えるものが多い。

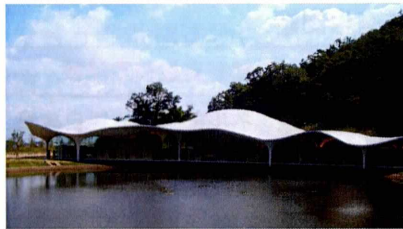


Fig.1.1 瞑想の森 市営斎場(2006)

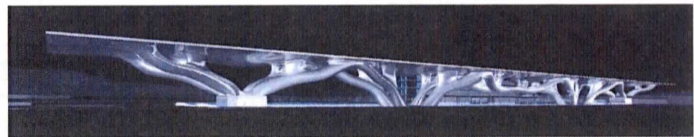


Fig.1.2 フィレンツェ新駅コンペ案(2002)

このような離散体構造の組合せ問題における構造物最適化問題に対しては発見的最適化手法である遺伝的アルゴリズムを用いた構造形態創生手法が近年多く研究されている。現在、遺伝的アルゴリズムを用いた構造形態創生の例として、高瀬により位相・部材断面を変数とした総重量最小化問題に取り組み、構造物の効率的な部材配置の決定例(2007年)、円酒によりラチスシェル構造物の節点Z座標と部材断面を変数とした歪エネルギー最小化問題への取り組み(2008年)、また川瀬により多目的遺伝的アルゴリズムを用いた検討により構造物の形態修正を行うことにより合理的に外力に抵抗する形態の創生が報告されている(Table.1.1)。しかし、実設計においてシェルやラチスドームなどの構造形状が曲面で構成されるような空間構造においては、その変位や荷重がある大きさに達すると、これまでとは全く別の平衡状態に移行し、座屈と呼ばれる不安定現象を起こす場合がある。

この座屈現象は、その構造形態によっては構造材料のもつ強度を十分に発揮することなく構造物を崩壊に至らしめる場合も少なくないことから、構造物の安全性を検討する上で重要な要因として挙げられる。

空間構造物の座屈挙動は、その幾何学的な寸法、形状に大きく依存している。このため、構造形状を決定する設計の初期段階において、安定性の高い構造形状を検討し、選択することは有効であると考えられる。

本論ではこれまでの研究より得られてきた合理的な構造物に対して、さらに線形座屈荷重係数を考慮することによって、構造安定性を備えたより実設計に配慮された構造デザイン手法を目指すものとする。

以下に当研究室での GA を用いた構造形態創生の流れを示す(Table.1.1)。表中の数字は研究年度、()内の名前は研究者名を表し、赤色で示す項目に関しては本論で扱う研究を示す。

変数 \ 目的関数	単一目的最適化問題			
	歪エネルギー	総自重	線形座屈荷重係数	
位相	-	2007(高瀬)	-	
部材断面	×	2007(高瀬)・2008(円酒)	2009	
節点 Z 座標	2008(円酒)	×	2009	
部材断面・節点 Z 座標	2008(円酒)	×	-	
変数 \ 目的関数	多目的最適化問題			
	歪エネルギー		線形座屈荷重係数	
	総自重	総節点移動距離	歪エネルギー	総自重
位相	-	×	-	-
部材断面	2009(川瀬)	×	×	2009
節点 Z 座標	×	2009(川瀬)	2009	×
部材断面・節点 Z 座標	2009(川瀬)	×	-	-

(×印は目的関数と変数の関連性が低い問題)

Table.1.1 遺伝的アルゴリズムによる構造形態創生の研究

1.4 論文の構成

論文の構成は以下のとおりである。

第2章では、本研究の理論準備として、単層ラチスシェル構造の曲面形状表現手法として用いられる、スプライン関数その発展形である NURBS について述べる。また、その後は本論で用いる座屈解析に関する理論について述べる。

続いて、組合せ最適化理論を示し、変数の数が増えるに従い、解析領域が膨大に広がる事を述べ、その解法として本論で用いた発見的手法の一つである遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm, 以後 GA) について述べる。加えて、性質の異なる変数を同時に検討していく多層型遺伝的アルゴリズムの流れを示す。また、変数を GA の遺伝子に変換する際のコーディング手法及び解析の合理化を図るために対称性と NURBS による遺伝子数の削減手法について示す。さらには、単一目的最適化問題および多目的最適化問題について、その解の概念と GA の多目的問題への応用例として本論で用いた多目的遺伝的アルゴリズム (以後、多目的 GA) である SPEA2 について述べる。

最後に探索の効率化を図るための一般的な並列化手法を示した後、多目的遺伝的 GA のために 2009 年に川瀬により考案された手法である重み付き島モデルによる並列 GA について述べる。

第3章では線形座屈荷重係数を目的関数とした解析例を挙げる。第2節では本論で検討歩を行う離散構造物における線形座屈荷重係数を含む構造最適化問題の記述を GA における適合度関数として定式化を行う。

第3節では例題1として、部材断面を変数とした線形座屈荷重係数の最大化問題を取り扱う。さらに汎用構造解析ソフトウェア Multiframe を用いて本研究プログラムの解の精度を確認する。続く第4節では例題2として節点 Z 座標を変数とした線形座屈荷重係数の最大化問題を取り扱う。第5節からは多目的最適化問題に移り、例題3として部材断面を変数とした線形座屈荷重係数最大化および総自重最小化問題を取り扱い、パレート解集合を示しそれぞれの数値解析結果を示す。第6節では例題4として節点 Z 座標を変数とした線形座屈荷重係数最大化および歪エネルギー最小化問題を取り扱い、第5節同様にパレート解集合を示しそれぞれの数値解析結果を示す。

なお、例題はいずれも荷重条件として実構造物の屋根荷重を想定した荷重による検討を行う。

第4章では、本論の総括を述べ、今後の課題を示す。

第 2 章

理論準備

2.1 概説

本章ではラチスシェル構造物の形状最適化を行うために必要となる基礎理論の説明を行う。

第 2.2 節では、曲面形状を表現するために用いるスプライン関数について述べる。まずスプライン関数について定義を行い、その後にはスプライン関数の応用として、スプライン補間、パラメトリックスプライン、リーゼンフェルトスプラインについて述べ、スプライン関数の発展形である NURBS について言及する。

第 2.3 節では、空間構造物における座屈問題について述べ、有限要素法における一般固有値問題を解くことで線形座屈荷重係数を得ることを述べる。

第 2.4 節では、組合せ最適化理論の概要と問題における定式を示す。また、組合せ最適化を行う上で留意すべき組合せ爆発について触れ、現在用いられる多目的遺伝的アルゴリズムによる解析手法を紹介し、変数削減のためのコーディング手法を示す。

第 2.5 節では、単一目的最適化問題について述べる。

第 2.6 節では、多目的最適化問題について述べ、組合せ最適化で近年多く用いられ、本論で用いた多目的遺伝的アルゴリズムである SPEA2 について示す。

第 2.7 節では、並列化手法による探索の効率化についていくつかの手法に触れ、本論に用いた並列化手法について述べる。

第 2.8 節では、本章における結語を示す。

2.2 スプライン関数による形状表現

スプライン関数は、区分的に多項式で表され、しかも適当な滑らかさを持つ関数である。これは別の面からいえば、階段関数を何度か積分して得られる関数である。このように、それ自体は簡単なものであるが、区分的なため、複雑な形をした関数を能率よく近似できるという抜群に優れた性質を持っている。

スプライン関数は1946年に Schoenberg が定義し、命名したものである。スプラインの名は製図で図面上に与えられた点列を滑らかにむすぶ曲線を描くのに用いる道具(自在定規) から取られている。Schoenberg 以降、スプライン関数に関して多くの研究が行われ、幅広い分野で応用されるようになった。スプライン関数は多項式に比べて振動が少なく、局所的な変化が全体に影響しにくい局所性を持っている。この特性を活かして補間や数値微分積分、実験データからの関数近似、CAD などにおける曲線・曲面の設計、システム同定、パターン認識などで使用する確率密度関数の推定、フーリエ変換など多岐にわたる分野で使用されている。

特に、CAD/CAM の分野ではスプライン関数を用いた形状表現手法に関する研究が進み、従来の Bezier や Bspline などの区分的多項式曲線・曲面をさらに一般化させた NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)が登場した。これにより、円・楕円・放物線などの円錐曲線や球面・円柱面・円錐面などの初等幾何形状から自由曲線・曲面まであらゆる形状を統一的に表現することが可能となった。近年、ほとんどの CAD/CAM システムで NURBS が使われており、形状表現手法としてスタンダードとなりつつある。

本研究では、形態デザイン手法に NURBS を応用している。これにより形状表現の自由度を損なわずに、大幅な未知量の低減ができ、なおかつ曲面形状の滑らかさが失われ、傾きが不連続になる心配もない。さらに、コンピュータと対話しつつ曲面形状をコントロールすることができる。

2.2.1 スプライン関数の定義

スプライン関数(spline function)とは、小区間内では、それぞれ異なる多項式関数であり、それらが互いにできるだけ滑らかにつながった、区分的多項式関数である。各小区間を形作る結び目を節点(knot あるいは連結点)と呼び、節点の点列をノットベクトル(knot vector)と呼ぶ。スプライン関数の厳密な数学的定義は次のようである。

定義1 m 次のスプライン関数は、その m 階微分が階段関数で、 $m-1$ 階以下の微分が連続であるような関数である。

定義2 m 次のスプライン関数は階段関数の m 重不定積分である。

定義3 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ を増加する実数列とする。そのとき、節点 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ をもつ m 次のスプライン関数とは、次の2つの条件(i),(ii)を満たす関数 $s(x)$ である。

- (i) 各小区間 (ξ_i, ξ_{i+1}) (ただし $i = 0, 1, \dots, n$ とし, $\xi_0 = -\infty, \xi_{n+1} = \infty$) で $s(x)$ は m 次かそれ以下の次数の多項式で与えられる。
- (ii) $s(x)$ とその $1, 2, \dots, m-1$ 階微分は $(-\infty, \infty)$ で連続である。

ただし, 0 次のスプライン関数は階段関数であり, この場合, 条件(ii)は適用しない。また, 1 次のスプライン関数は折れ線である。これらの定義は, スプライン関数が各小区間では必ず異なる多項式で与えられることを言うておらず, $(-\infty, \infty)$ で単一の m 次多項式は, m 次のスプライン関数の特殊なものとして考えられる。

なお, スプライン関数の次数に 1 を足したものを階数という。次数も階数も上に挙げた定義からわかるように曲線の滑らかさを決定する指標である。

2.2.2 スプライン関数の表現

スプライン関数は滑らかな区分的多項式関数であるが, 小区間ごとに多項式で表現することは不便であり, 全区間で 1 つの式となる表現法を用いるほうが便利である。そのような表現法は大きく分けて 1 つある。切断べき関数による表現と B スプラインによる表現である。本節では, より簡単な表現である切断べき関数による表現から述べ, その後, B スプラインによる表現について述べる。本論では多層型 GA を採用し, 断面, 節点 Z 座標それぞれの変数の性質を考慮した GA 操作を行う。

・切断べき関数によるスプライン関数の表現

まず, 切断べき関数という関数を導入する。今, ξ_0 で 1 つの節点を持ち, $x \leq \xi_0$ に対して恒等的に 0 であり, $x \geq \xi_0$ に対してある m 次多項式 $q_m(x)$ を与えるような m 次のスプライン関数 $s(x)$ を考える。これは多項式以外で最も簡単な m 次のスプライン関数である。

スプライン関数の定義より $s(x)$ それ自身と $1, 2, \dots, m-1$ 階微分は, $x = \xi_0$ も含めた全領域で連続でなければならない。それゆえ多項式 $q_m(x)$ とその $1, 2, \dots, m-1$ 階微分は $x = \xi_0$ で 0 である。したがって $q_m(x)$ は次式のようになる。

$$q_m(x) = c(x - \xi_0)^m \quad (2.2.1)$$

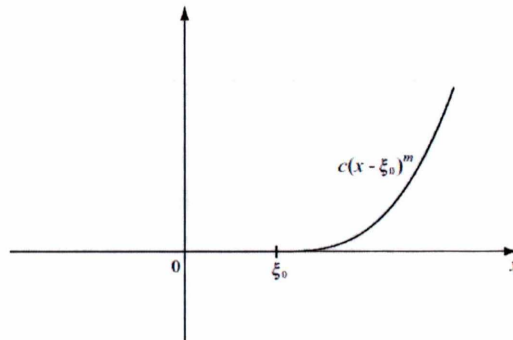


Fig 2.2.1 切断べき関数

ここで、 c は定数係数である。

したがって、スプライン関数 $s(x)$ は次式のように表せる。

$$s(x) = c(x - \xi_0)_+^m \quad (2.2.2)$$

ここで、 $c(x - \xi_0)_+^m$ は切断べき関数(truncated power function) と呼ばれ、次のようである。

$$c(x - \xi_0)_+^m = \begin{cases} 0 & (x \leq \xi_0) \\ c(x - \xi_0)_+^m & (x > \xi_0) \end{cases} \quad (2.2.3)$$

この切断べき関数を用いて、任意のスプライン関数を一義的に表すことができる。

今、 $s(x)$ を m 次スプライン関数とし、その節点の 1 つを ξ_i とする。 $s(x)$ は、小区間 (ξ_{i-1}, ξ_i) では m 次多項式 $p_m(x)$ によって、また小区間 (ξ_i, ξ_{i+1}) では m 次多項式 $q_m(x)$ によって与えられているとする。このとき、 m 次多項式 $q_m(x) - p_m(x)$ およびその $1, 2, \dots, m-1$ 階微分は、 $x = \xi_i$ で全て 0 に等しくなくてはならない。したがって m 次多項式 $q_m(x) - p_m(x)$ は $x = \xi_i$ で m 重根を持ち、

$$q_m(x) - p_m(x) = c(x - \xi_i)^m \quad (2.2.4)$$

となる。ただし、 c は定数係数である。

さらに、 $r_m(x)$ を小区間 $(-\infty, \xi_1)$ で $s(x)$ の値を与える m 次多項式であるとする。このとき式 (2.2.4) により、小区間 (ξ_1, ξ_2) での $s(x)$ は多項式

$$r_m(x) + c_1(x - \xi_1)^m \quad (2.2.5)$$

によって表される。ただし、 c_1 はある定数である。同様な方法により次の一般式

$$s(x) = r_m(x) + \sum_{j=1}^i c_j(x - \xi_j)^m \quad (\xi_i \leq x \leq \xi_{i+1}) \quad (2.2.6)$$

が導かれる。ところが、 $x < \xi_j$ では $(x - \xi_j)_+^m = 0$ であるから、一般に、 n 個の節点 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ をもつ m 次スプライン関数 $s(x)$ は、切断べき関数を用いて一義的に表され、次式のようにかける。

$$s(x) = r_m(x) + \sum_{i=1}^n c_i(x - \xi_i)_+^m \quad (2.2.7)$$

ここで、 $r_m(x)$ は m 次の多項式であり、 c_i は定数係数である。

上式より、任意の m 次スプライン関数 $s(x)$ は n 個の節点 ξ_i と係数 c_i 、そして m 次多項式 $r_m(x)$ を決めることによって構成できることがわかる。

・Bスプライン

前小節では、切断べき関数によるスプライン関数の表現について述べた。切断べき関数による表現は、実際にコンピュータで用いる場合には数値誤差が生じやすく、あまりよい表現法とはいえない。この困難は、Bスプラインと呼ばれる特殊なスプラインと差分商とを用いて表現法を適当に変形することによって解決できる。本小節では、それらの関数を定義し、その性質のいくつかを示す。

差分商

まず、差分商(divided difference)の定義から始める。今、関数

$$y = f(x) \quad (2.2.8)$$

を考える。 ξ_1, ξ_2, \dots をそれぞれ異なる座標とする。ここでは必ずしも ξ_1, ξ_2, \dots が昇順である必要がない。ここで、1階差分商を

$$f(\xi_i, \xi_{i+1}) = \frac{f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i)}{\xi_{i+1} - \xi_i} \quad (2.2.9)$$

と定義する。幾何学的にはデータ点 (ξ_i, y_i) と (ξ_{i+1}, y_{i+1}) を結ぶ線分の勾配である。高階差分商は、関係式

$$f(\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+r+1}) = \frac{f(\xi_{i+1}, \xi_{i+2}, \dots, \xi_{i+r+1}) - f(\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+r})}{\xi_{i+r+1} - \xi_i} \quad (2.2.10)$$

によって順次定義される。このとき関数値 $f(\xi_i)$ は 0 階の差分商とみなすことができる。式 (2.3.10) をさらに変形させると次式のようになる。

$$f(\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+r+1}) = \sum_{j=i}^{i+r+1} \frac{f(\xi_j)}{P_j(\xi_j)} \quad (2.2.11)$$

ここで

$$P_j(\xi_j) = \prod_{k=i, k \neq j}^{i+r+1} (\xi_j - \xi_k) \quad (2.2.12)$$

である。

また、 m 次多項式の任意の m 階差分商は、多項式の x^m の係数に等しく、またそれより高階の任意の差分商は 0 に等しいという性質をもつ。

Bスプラインの構成と性質

$k-1$ 次の B スプラインは次のように定義される。

定義 3.3.1 2 変数関数 $M_k(x; \xi)$ を

$$M_k(x; \xi) = (\xi - x)_+^{k-1} \quad (2.2.13)$$

と定義し, $\xi_i < \xi_{i+1} < \dots < \xi_{i+k}$ の節点で ξ に関する $M_k(x; \xi)$ の k 階差分商 $M_k(x; \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+k})$ を用いて,

$$B_{i,k}(x; \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+k}) = (\xi_{i+k} - \xi_i) M_k(x; \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+k}) \quad (2.2.14)$$

と定義される関数 $B_{i,k}(x; \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+k})$ を $k+1$ 個の節点 $\xi_i < \xi_{i+1} < \dots < \xi_{i+k}$ をもつ $k-1$ 次の B スプライン(B-spline) という。なお, 今後, 節点を明示する必要がない場合には $k-1$ 次の B スプラインを単に $B_{i,k}(x)$ と表すことにする。

式(2.2.13)は次のように変形できる。

$$(\xi - x)_+^{k-1} = (\xi - x)^{k-1} + (-1)^k (x - \xi)_+^{k-1} \quad (2.2.15)$$

また, $k-1$ 次多項式の k 階差分商は 0 であることと式(2.2.11)を用いると式(2.2.14)は次式のようにかける。

$$B_{i,k}(x) = (-1)^k (\xi_{i+k} - \xi_i) \sum_{j=i}^{i+k} \frac{(x - \xi_j)_+^{k-1}}{P_j(\xi_j)} \quad (2.2.16)$$

スプライン関数は, 一般にこの B スプラインの重ね合わせで表現できる。ここで, B スプラインにどのような性質があるか調べてみる。

0 次の B スプラインは式(2.3.16) に $k=1$ を代入して

$$\begin{aligned} B_{i,1}(x) &= -(\xi_{i+1} - \xi_i) \left\{ \frac{(x - \xi_i)_+^0}{(\xi_i - \xi_{i+1})} + \frac{(x - \xi_{i+1})_+^0}{(\xi_{i+1} - \xi_i)} \right\} \\ &= (x - \xi_i)_+^0 - (x - \xi_{i+1})_+^0 \\ &= \begin{cases} 1 & (\xi_i \leq x < \xi_{i+1}) \\ 0 & (x < \xi_i, \xi_{i+1} \leq x) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

となる。このように, 0 次の B スプライン $B_{i,1}(x)$ は 2 つの節点 ξ_i, ξ_{i+1} から構成される階段関数となっている。

次に, 1 次の B スプラインは, $k=2$ であるから

$$\begin{aligned}
B_{i,2}(x) &= \left\{ \frac{(x-\xi_i)_+}{(\xi_{i+1}-\xi_i)} + \frac{(x-\xi_{i+1})_+(\xi_{i+2}-\xi_i)}{(\xi_{i+1}-\xi_i)(\xi_{i+2}-\xi_{i+1})} + \frac{(x-\xi_{i+2})_+}{(\xi_{i+2}-\xi_{i+1})} \right\} \\
&= \begin{cases} \frac{x-\xi_i}{\xi_{i+1}-\xi_i} & (\xi_i \leq x < \xi_{i+1}) \\ \frac{\xi_{i+2}-x}{\xi_{i+2}-\xi_{i+1}} & (\xi_{i+1} \leq x < \xi_{i+2}) \\ 0 & (x < \xi_i, \xi_{i+2} \leq x) \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

と表されるので、これを0次のBスプラインを用いて次のように書きなおすことができる。

$$B_{i,2}(x) = \frac{x-\xi_i}{\xi_{i+1}-\xi_i} B_{i,1}(x) + \frac{\xi_{i+2}-x}{\xi_{i+2}-\xi_{i+1}} B_{i+1,1}(x) \tag{2.2.19}$$

$k-1$ 次のBスプライン $B_{i,k}(x)$ はそれを構成している節点間 $\xi_i \leq x < \xi_{i+k}$ で $B_{i,k}(x) \neq 0$ であり、また、 $x \leq \xi_i$ および $x \geq \xi_{i+k}$ で $B_{i,k}(x) = 0$ であることが大きな特徴である。このように局所的には0でない値をもちうるが、それ以外では0となるような関数を数学的に局所台をもつ(local support)もしくはlimited support)関数と呼ぶ。

de Boor-Cox の算法

次に、Bスプラインを安定に計算するための算法について述べる。Bスプラインは差分商によって定義されている。ところが差分商を用いて数値的にBスプラインをもとめる計算では、差分商をとる過程で有効数字が失われることがある。これは差分商の計算が切断べき関数による表現を利用しているからである。

Bスプラインを計算するのに差分商によらず、漸化式を用いる安定な計算法が開発されている。これをdeBoor-Coxの算法という。以下では、de Boor-Coxの算法について述べる。

まず、de Boor-Coxの算法を導く上で、重要なLeibnizの積の差分商公式を導入する。

関数 $f(x)$ が $g(x), h(x)$ によりすべての x に対して $f(x) = g(x)h(x)$ と表されるとき、両辺に $\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+k}$ を基礎とした差分商をとると次式のLeibnizの積の差分商公式となる。

$$f(\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+k}) = \sum_{r=i}^{i+k} g(\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+r}) h(\xi_r, \xi_{r+1}, \xi_{i+k}) \tag{2.2.20}$$

次に、 $M_k(x; \xi)$ を

$$M_k(x; \xi) = (\xi - x)_+^{k-1} = (\xi - x)(\xi - x)_+^{k-2} \tag{2.2.21}$$

とし、両辺に $\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+k}$ を基礎とした ξ に関する差分商をとり、かつ右辺にLeibnizの積の差分商公式(2.2.20)を利用する。ここで、 $g(x; \xi) = (\xi - x)$ とし、

$$\begin{aligned}
g(x; \xi) &= (\xi - x) \\
g(x; \xi_i, \xi_{i+1}) &= 1 \\
g(x; \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+j}) &= 0 \quad (j > 1)
\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

を考慮すると

$$\begin{aligned}
M_{i,k}(x) &= M_k(x; \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+k}) \\
&= (\xi_i - x)M_{k-1}(x; \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+k}) + 1 \cdot M_{k-1}(x; \xi_{i+1}, \xi_{i+2}, \dots, \xi_{i+k}) \\
&= \frac{\xi_i - x}{\xi_{i+k} - \xi_i} \{M_{k-1}(x; \xi_{i+1}, \xi_{i+2}, \dots, \xi_{i+k}) - M_{k-1}(x; \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+k-1})\} \\
&\quad + \frac{\xi_{i+k} - \xi_i}{\xi_{i+k} - \xi_i} M_{k-1}(x; \xi_{i+1}, \xi_{i+2}, \dots, \xi_{i+k}) \\
&= \frac{x - \xi_i}{\xi_{i+k} - \xi_i} M_{k-1}(x; \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+k-1}) + \frac{\xi_{i+k} - x}{\xi_{i+k} - \xi_i} M_{k-1}(x; \xi_{i+1}, \xi_{i+2}, \dots, \xi_{i+k})
\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

となる。式(2.2.14) で定義される B スプラインを用いると、上式は次のようにかける。

$$B_{i,k}(x) = \frac{x - \xi_i}{\xi_{i+k-1} - \xi_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{\xi_{i+k} - x}{\xi_{i+k} - \xi_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x) \tag{2.3.24}$$

これより、1 次の B スプラインが式(2.3.19)で 0 次の B スプラインで表すことができたように、一般に $k-1$ 次の B スプライン $B_{i,k}(x)$ は、漸化式(2.2.24)で表すことができる。

今、 $x(\xi_i \leq x < \xi_{i+1})$ に対し、0 でない $k-1$ 次の B スプラインを求めてみる。まず、出発点として 0 次の B スプラインは式(2.2.17)

$$B_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 & (\xi_i \leq x < \xi_{i+1}) \\ 0 & (x < \xi_i, \xi_{i+1} \leq x) \end{cases} \tag{2.2.25}$$

であるから、順次漸化式(2.2.24)を適用することにより、1 次, 2 次, ..., $k-1$ 次の 0 でない B スプラインが次々と求めることができる。

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & & 0 \\
& & & & & & B_{i-k+1,k} \\
& & & & & & \vdots \\
& & & & & & B_{i-k+2,k} \\
& & & & & & \vdots \\
& & & & & & \vdots \\
& & & 0 & & & \vdots \\
& & 0 & B_{i-2,3} & & & \vdots \\
& 0 & B_{i-1,2} & B_{i-1,3} & & & \vdots \\
& B_{i,1} & B_{i,2} & B_{i,3} & & & \vdots \\
& 0 & 0 & 0 & & & \vdots \\
& & & & & & 0
\end{array}$$

この算法のことを de Boor-Cox の算法と呼ぶ。

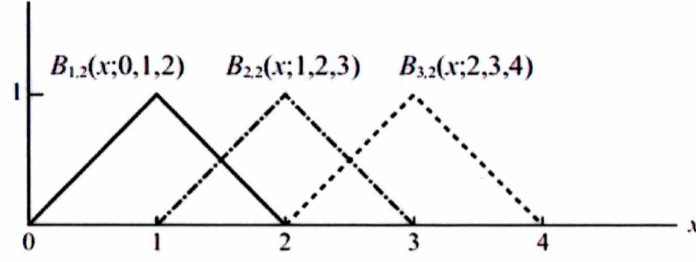


Fig 2.2.2 1 次の B スプライン関数

ここで、 $k-1$ 次の B スプラインの性質をまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & B_{i,k}(x) = 0 \quad (x \leq \xi_i, \xi_{i+1} \leq x) \\
 (b) \quad & B_{i,k}(x) > 0 \quad (\xi_i < x < \xi_{i+1}) \\
 (c) \quad & \sum_{i=1}^{s-r+k-1} B_{r-k+i,k}(x) = 1 \quad (\xi_r < x < \xi_s, k \leq r < s)
 \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

Fig 2.2.2 は節点 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5) = (0, 1, 2, 3, 4)$ を持つ、1 次の B スプライン $B_{i,2}(x), i=1, 2, 3$ を図示したものである。この図から性質(2.2.26)の(a),(b)は明らかであり、また(c)は、たとえば $r=2, s=4, k=2$ とすると、 $B_{1,2}(x), B_{2,2}(x), B_{3,2}(x)$ の和が区間 $1 \leq x \leq 3$ で 1 となることを示す。

2.2.3 スプライン関数の応用

スプライン補間

N 個のデータ点

$$(x_i, y_i) \quad (1 \leq i \leq N) \tag{2.2.27}$$

を通る $k-1$ 次のスプライン補間関数 $s(x)$ を構成する問題について考える。ただし、 x 座標は昇順 $(x_1 < x_2 < \dots < x_N)$ とする。このスプライン補間関数は N 個の $k-1$ 次のスプラインの線形結合で表現できる。

$$s(x) = \sum_{i=1}^N a_i B_{i,k}(x) \tag{2.2.28}$$

このとき原理としては、 $s(x)$ が N 個のデータ点を通ることから、上式を $a_i (i=1, \dots, N)$ を未知数とする N 元連立 1 次方程式と考えて解けばよい。以下で具体的なスプライン補間関数の構成法をステップに分けて説明する。

ステップ1

$k-1$ 次の B スプライン $B_{i,k}(x)$ の節点を決める。 $B_{i,k}(x)$ は節点 $\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+k}$ から構成され、 i が 1 から N までの値をとるので式(2.2.28)は、 $N+k$ 個の節点 $\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{N+k}$ が必要となる。 $s(x)$ が N 個のデータ点を通るように構成するためには、 N 個の B スプラインとデータ点の x 座標との関係が次の条件を満たさなければならない。

$$B_{i,k}(x_i) \neq 0 \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (2.2.29)$$

これを個々の B スプラインを構成する節点に着目していいかえると、データ点の x 座標は

$$\begin{aligned} \xi_1 &< x_1 < \xi_{1+k} \\ \xi_2 &< x_2 < \xi_{2+k} \\ &\vdots \\ \xi_N &< x_N < \xi_{N+k} \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

の条件を満たすことが必要である。この条件は Schoenberg-Whitney の条件と呼ばれる。

$k-1$ 次のスプライン関数の節点は簡単のために次のようにとることが多い。

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_2 = \dots = \xi_k = x_1 \\ \xi_{1+k} &= (x_i + x_{i+k})/2 \quad (i=1,2,\dots,N-k) \\ \xi_{N+1} &= \xi_{N+2} = \dots = \xi_{N+k} = x_N \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

これは Schoenberg-Whitney の条件を満たしている。ここで、 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ および $\xi_{N+1}, \xi_{N+2}, \dots, \xi_{N+k}$ は付加節点、 $\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots, \xi_N$ は内部節点である。付加節点は上のようにしばしば k 重の節点として用いられる。

ステップ2

$s(x)$ の係数 a_i を式(2.2.29)の N 個のデータ点を用いて決定する方法について述べる。 $k-1$ 次のスプライン関数 $s(x)$ は N 個のデータ点を通ることから

$$y_i = s(x_i) \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (2.2.32)$$

を満たす必要がある。ここで、データ点を式(2.2.28)に代入すると

$$\begin{aligned} a_1 B_{1,k}(x_1) + a_2 B_{2,k}(x_1) + \dots + a_N B_{N,k}(x_1) &= y_1 \\ a_1 B_{1,k}(x_2) + a_2 B_{2,k}(x_2) + \dots + a_N B_{N,k}(x_2) &= y_2 \\ &\vdots \\ a_1 B_{1,k}(x_N) + a_2 B_{2,k}(x_N) + \dots + a_N B_{N,k}(x_N) &= y_N \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

のような N 個の式が得られる。ここで、 $N+k$ 個の節点が Schoenberg-Whitney の条件を満足するように設定されているので、 $B_{i,k}(x_j)$ ($i, j=1,2,\dots,N$) の値が決まる。したがって、上式は未知数が a_1, a_2, \dots, a_N である N 元連立 1 次方程式である。マトリクスの形で書くと、

$$Ba = y \quad (2.2.34)$$

ただし

$$B = \begin{bmatrix} B_{1,k}(x_1) & B_{2,k}(x_1) & \cdots & B_{N,k}(x_1) \\ B_{1,k}(x_2) & B_{2,k}(x_2) & \cdots & B_{N,k}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1,k}(x_N) & B_{2,k}(x_N) & \cdots & B_{N,k}(x_N) \end{bmatrix} \quad (2.2.35)$$

$$a = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{Bmatrix} \quad (2.2.36)$$

$$y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{Bmatrix} \quad (2.2.37)$$

となる。マトリクス B の要素 $B_{i,k}(x_j)$ は B スプラインの有効な計算法である de Boor-Cox の算法を用いて早く安定に求めることができる。

ステップ3

最後に連立1次方程式(2.2.34)を解き a を決定することにより、 $k-1$ 次のスプライン関数が構成される。

以上がデータ点(2.2.29)に対する $k-1$ 次の補間スプライン関数を構成する手順である。構成された $k-1$ 次のスプライン関数 $s(x)$ を用いて、ある x での値を計算するには個々の B スプライン $B_{i,k}(x)$ を de Boor-Cox の算法により求め、代入すればよい。

パラメトリックスプライン

パラメータ表示

これまでの、 x, y 平面にある補間曲線の y 座標が補間関数 $f(x)$ によって

$$y = f(x) \quad (2.2.38)$$

と表される一価関数の場合について述べてきた。ここでは、2つの変数 x, y が

$$f(x, y) = 0 \quad (2.2.39)$$

と表される多価関数の場合について考える。そこで、補間曲線上の座標 (x, y) によって一意に決まるパラメータを導入する。この場合、補間すべきデータ点列 (x_i, y_i) に対してパラメータ t_i が決まり、新しい点列 $(t_i, x_i), (t_i, y_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) をつくることことができる。このとき、 x, y は t によって決まる関数

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

となる。このようなパラメータは具体的には簡単のため次のように与えることが多い。
 n 個のデータ点列を通る曲線がその点列を順次通過することにパラメータの値が0から1ずつ増加し、データ点列の第 i 番目と第 $i+1$ 番目の間では

$$i-1 \leq t < i \quad (2.2.41)$$

の値をとるものとする。したがって n 個のデータ点上で t_i ($i=1,2,\dots,n$)はそれぞれ $0,1,\dots,n-1$ となる。このようにパラメータ t はとなり合う2個のデータ点で差が常に1であり、複数個のデータ点を昇順に表現することができる。

このようなパラメータ t で表されたスプライン関数をパラメトリックスプラインと呼ぶ。

パラメトリックスプラインによる曲線補間

$k-1$ 次のパラメトリックスプラインによって n 個のデータ点を補間することを考える。これはいたって簡単である。式(2.2.40)の2つの式それぞれについてこれまでの $k-1$ 次のBスプラインを用いたスプライン補間の方法を適用すればよい。

したがって曲線座標 (x,y) はBスプライン $B_{i,k}(t)$ の線形結合として

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i B_{i,k}(t) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^n \beta_i B_{i,k}(t) \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

と表すことができる。ここで、 α_i, β_i は定数である。これにデータ点の座標 $(t_i, x_i), (t_i, y_i)$ およびその点のパラメータ t_i ($i=1,2,\dots,n$)に対する $B_{i,k}(t_i)$ の値を代入すると、それぞれ α_i, β_i に関する連立方程式が得られる。マトリクスの形で書くと

$$\begin{aligned} B\alpha &= x \\ B\beta &= y \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

ただし

$$B = \begin{bmatrix} B_{1,k}(t_1) & B_{2,k}(t_1) & \cdots & B_{n,k}(t_1) \\ B_{1,k}(t_2) & B_{2,k}(t_2) & \cdots & B_{n,k}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1,k}(t_n) & B_{2,k}(t_n) & \cdots & B_{n,k}(t_n) \end{bmatrix} \quad (2.2.44)$$

$$\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]^T, \quad \beta = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n]^T \quad (2.2.45)$$

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T, \quad y = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]^T \quad (2.2.46)$$

これらの連立1次方程式を解くと α, β が決まり、パラメータ t に対する補間式(2.2.42)が得られる。

Fig2. 2.3 にパラメトリックスプラインによる曲線補間の例を示す。

パラメトリックスプラインによる曲面補間

ここでは3次元空間内にデータ点を与えて、それらの点を補間する曲面について考える。まず、パラメータとして t のほかに新たに s を導入する。空間座標 (x, y, z) はそれぞれ2つのパラメータを使って表される。

$$\begin{aligned} x &= x(s, t) \\ y &= y(s, t) \\ z &= z(s, t) \end{aligned} \quad (2.2.47)$$

これらの座標は曲線からの拡張として、 s, t をそれぞれ変数とするBスプラインの積として表すことができる。

$$\begin{aligned} x(s, t) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \alpha_{ij} B_{i,k}(s) B_{j,l}(t) \\ y(s, t) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \beta_{ij} B_{i,k}(s) B_{j,l}(t) \\ z(s, t) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \gamma_{ij} B_{i,k}(s) B_{j,l}(t) \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

ここで $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}$ は定数である。また、 i, j はそれぞれ一本の s 曲線および t 曲線が通るデータ点の個数であり、体で $I \times J$ の3次元データを補間することになる。 k, l はそれぞれ s 曲線および t 曲線の階数である。このスプラインの積は2変数スプラインであり、特に $k=1$ の場合には双スプラインとよばれる。

$I \times J$ 個のデータ点の座標およびそれらの点の s, t の値に対するそれぞれ $k-1$ 次、 $l-1$ 次のBスプラインの値 $B_{i,k}(s_i), B_{j,l}(t_j)$ を用いて定数 α_{ij} に関する連立方程式をたてると次のようになる。

$$A\alpha = x \quad (2.2.49)$$

ただし

$$A = \begin{bmatrix} B_{1,k}(s_1)B_{1,l}(t_1) & \cdots & B_{1,k}(s_1)B_{J,l}(t_1) & \cdots & B_{1,k}(s_1)B_{1,l}(t_l) & \cdots & B_{1,k}(s_1)B_{J,l}(t_l) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1,k}(s_1)B_{1,l}(t_J) & \cdots & B_{1,k}(s_1)B_{J,l}(t_J) & \cdots & B_{1,k}(s_1)B_{1,l}(t_l) & \cdots & B_{1,k}(s_1)B_{J,l}(t_l) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1,k}(s_I)B_{1,l}(t_1) & \cdots & B_{1,k}(s_I)B_{J,l}(t_1) & \cdots & B_{1,k}(s_I)B_{1,l}(t_l) & \cdots & B_{1,k}(s_I)B_{J,l}(t_l) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1,k}(s_I)B_{1,l}(t_J) & \cdots & B_{1,k}(s_I)B_{J,l}(t_J) & \cdots & B_{1,k}(s_I)B_{1,l}(t_l) & \cdots & B_{1,k}(s_I)B_{J,l}(t_l) \end{bmatrix} \quad (2.2.50)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= [\alpha_{11} \quad \cdots \quad \alpha_{1J} \quad \cdots \quad \alpha_{I1} \quad \cdots \quad \alpha_{IJ}]^T \\ x &= [x_{11} \quad \cdots \quad x_{1J} \quad \cdots \quad x_{I1} \quad \cdots \quad x_{IJ}]^T \end{aligned} \quad (2.2.51)$$

同様に定数 β_{ij}, γ_{ij} に関する式を構成すると次のようになる。

$$A\beta = y \quad (2.2.52)$$

$$A\gamma = z \quad (2.2.53)$$

これらの式を解いて得られた $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}$ の値を用いれば, s, t の変動に対する空間座標が計算でき, 曲面を生成することができる。Fig 2.2.4 にパラメトリックスプラインによる曲面補間の例を示す。

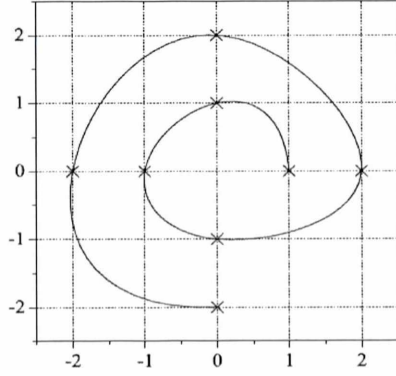


Fig 2.2.3 パラメトリックスプラインによる曲線補間の例(\times はデータ点の位置を表す)

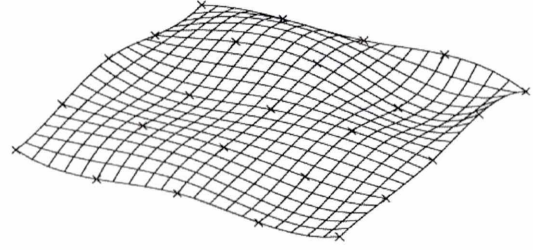


Fig 2.2.4 パラメトリックスプラインによる曲面補間の例(\times はデータ点の位置を表す)

リーゼンフェルトスプライン

これまでは与えられたデータ点を補間する曲線・曲面について考えてきたが, この曲線・曲面を表す関数は B スプラインの線形結合で表され, その結合係数を求めるために連立方程式を解かなければならなかった。そしてデータ点を変更した場合にはそのつど方程式を解き直さなければならず, その変更によって曲線・曲面は全体的に変化することになる。そこで Riesenfeld はデータ点の座標そのものを結合係数としてみなす手法を提案した。これはデータ点を補間するパラメトリックスプラインと区別するためにリーゼンフェルトスプラインとよばれる。また, このようにデータ点の座標を結合係数として捉えた場合, データ点自体のことを特に制御点と呼ぶ。この手法の特徴は結合係数を求めるための連立方程式を解く必要がないということ, さらに, B スプラインの局所性をもつ性質により, 制御点の位置や個数を変更してもその影響が曲線・曲面全体には及ぶことがないということである。また, 制御点の位置を変更したときにその変動方向に応じた変形がなされるので便利である。

リーゼンフェルトスプラインによる曲線

n 個の制御点により表現される $k-1$ 次のリーゼンフェルトスプラインによる曲線は次のように表される。

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^n x_i B_{i,k}(t) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^n y_i B_{i,k}(t) \end{aligned} \quad (2.2.54)$$

ここで x_i, y_i は制御点の座標である。

n 個の制御点のパラメータ t の値に対する $k-1$ 次の B スプラインの値 $B_{i,k}(t)$ を求めて (2.2.54) 式の計算を実行すれば曲線が得られる。

なお、リーゼンフェルトスプラインによる曲線のことを CAD/CAM の分野などでは単に B スプライン曲線と呼ぶことがある。以後、B スプライン曲線という言葉を使った場合にはリーゼンフェルトスプラインによる曲線を指す。

Fig2. 2.5 にリーゼンフェルトスプラインによる曲線の例を示す。

リーゼンフェルトスプラインによる曲面

リーゼンフェルトスプラインによる曲線表示を曲面に拡張する。曲面上の位置を定める 2 つのパラメータを $s, t (0 \leq s, t \leq 1)$ とする。曲面形状を定義する制御点を 1 本の s 曲線および t 曲線上にそれぞれ I 個, J 個配置し、全体として $I \times J$ 個配置し、 i 番目 s 曲線と j 番目 t 曲線の交点上の制御点の座標を (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) とする。このときリーゼンフェルトスプラインによる曲面は次のように表される。

$$\begin{aligned} x(s, t) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij} B_{i,k}(s) B_{j,l}(t) \\ y(s, t) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ij} B_{i,k}(s) B_{j,l}(t) \\ z(s, t) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J z_{ij} B_{i,k}(s) B_{j,l}(t) \end{aligned} \quad (2.2.55)$$

制御点のパラメータ s, t の各々の値に対する B スプラインの値 $B_{i,k}(s)$ および $B_{j,l}(t)$ を求めて (2.3.55) 式の計算を実行すれば曲面が得られる。

なお、リーゼンフェルトスプラインによる曲面のことを CAD/CAM の分野などでは単に B スプライン曲面と呼ぶことがある。以後、B スプライン曲面という言葉を使った場合にはリーゼンフェルトスプラインによる曲面を指す。

Fig 2.2.6 にリーゼンフェルトスプラインによる曲面の例を示す。

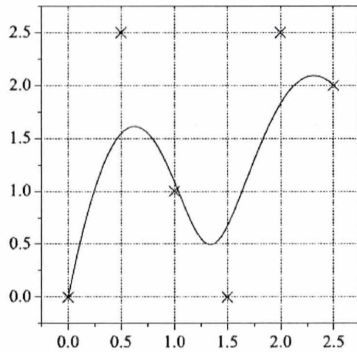


Fig 2.2.5 リーゼンフェルトスプラインによる曲線の例(\times は制御点の位置を表す)

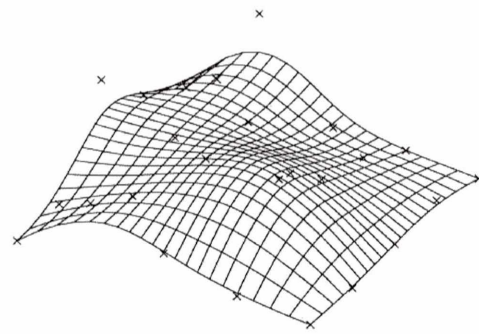


Fig 2.2.6 リーゼンフェルトスプラインによる曲面の例(\times は制御点の位置を表す)

2.2.4 NURBS

NURBS とは、Non-Uniform Rational B-Spline(非一様有理 B-スプライン)の頭文字による略称である。NURBS による表現形式は、区分的有理式としてパラメータ表現するもので、従来の Bezier や B-spline などの区分的多項式曲線・曲面の一般化になっており、円・円弧・楕円・楕円弧などの円錐曲線や球面・円柱面・円錐面などの曲面を近似なしに表現できるよう改良されている。さらに制御点と曲線・曲面との関係を拡張し、複数の制御点が重なるのを許して折れなどの表現も可能になっている。

以上のような要因により、近年、ほとんどの CAD/CAM システムで NURBS が使われており、形状モデリングを行う上でスタンダードとなりつつある。

4次元座標系の導入と有理化

これまで B スプラインで扱ってきた点は 3 次元の点であり、3 次元座標 (x, y, z) で指定される点であった。重み w を加えた 4 次元座標を採用するとより表現性のある曲線や曲面を表現できる。この 4 次元座標は (x, y, z, w) で重み w を使い、 $X=wx, Y=wy, Z=wz$ とする。通常の 3 次元座標は $x=X/w, y=Y/w, z=Z/w$ と重み w で割り算をした有理式で求める。これは次のような 4 次元空間から 3 次元空間への射影写像を意味する。

$$H:(X, Y, Z, w) \rightarrow (X/w, Y/w, Z/w) \quad (2.2.56)$$

なお、 (X, Y, Z, w) で表される座標系は同次座標系あるいは斉次座標系とよぶ。いままで用いてきた曲線や曲面の制御点を 4 次元座標としても数式はそのまま使用できる。すなわち、曲線や曲面の形成は 4 次元空間で考え、最後に重み要素で割り算して通常の 3 次元座標を得る。この方法によると、3 次元での補間では不可能である円や楕円、球や楕円球などの解析曲線や解析曲面を表現できる。

NURBS 曲線

NURBS 曲線はパラメトリック空間によって、自由曲線から円・楕円といった解析的な曲線までも統一的に表現できる特徴を持っている。

表現式は次のように与えられる。まず曲線の形成を 4 次元空間で考える。

$$C^w(t) = \sum_{i=1}^l B_{i,k}(t) P_i^w \quad (2.3.57)$$

ここで $C^w(t) = [X(t) \ Y(t) \ Z(t) \ w(t)]^T$ であり、 P_i^w は 3 次元制御点座標を同次座標系に変換したものである。

次に、 $C^w(t)$ を射影写像 H により 3 次元空間に写像することで 3 次元空間上の曲線 $C(t)$ を得る。

$$C(t) = H(C^w(t)) \quad (2.2.58)$$

ここで $C(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]^T$ である。

(2.2.57)式、(2.2.58)式をまとめて表現すると次のようになる。

$$C(t) = \frac{\sum_{i=1}^I B_{i,k}(t) w_i P_i}{\sum_{i=1}^I B_{i,k}(t) w_i} \quad (2.2.59)$$

ここで $P_i = H(P_i^w)$ であり, 3次元空間上での制御点座標である。

なお重み w_i を全て 1 にすると $C(t)$ は B スプライン曲線となる。

NURBS 曲面

NURBS 曲面はパラメトリック空間によって, 自由曲面から球・楕円球といった解析的な曲面までも統一的に表現できる特徴を持っている。NURBS 曲面も表現式は NURBS 曲線と同様である。

$$S^w(s, t) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J B_{i,k}(s) B_{j,l}(t) P_{ij}^w \quad (2.2.60)$$

ここで $S^w(s, t) = [X(s, t) \ Y(s, t) \ Z(s, t) \ w(s, t)]^T$ であり, P_{ij}^w は 3次元制御点座標を同次座標系に変換したものである。

次に, $S^w(s, t)$ を射影写像 $H: (X, Y, Z, w) \rightarrow (X/w, Y/w, Z/w)$ により 3次元空間に写像することで曲面 $S(s, t)$ を得る。

$$S(s, t) = H(S^w(s, t)) \quad (2.2.61)$$

ここで $S(s, t) = [x(s, t) \ y(s, t) \ z(s, t)]^T$ である。

(2.2.60)式, (2.2.61)式をまとめて表現すると次のようになる。

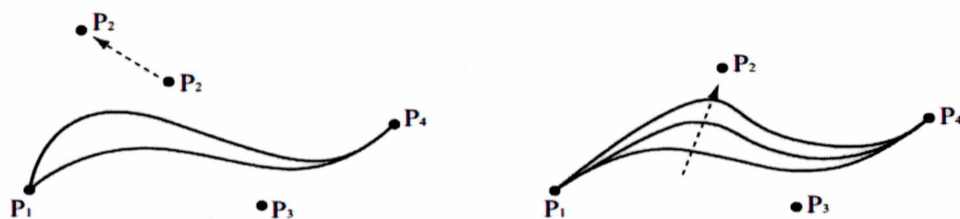
$$S(s, t) = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J B_{i,k}(s) B_{j,l}(t) w_{ij} P_{ij}}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J B_{i,k}(s) B_{j,l}(t) w_{ij}} \quad (2.2.62)$$

ここで $P_{ij} = H(P_{ij}^w)$ であり, 3次元空間上での制御点である。

なお重み w_{ij} を全て 1 にすると $S(s, t)$ は B スプライン曲面となる。

制御点と重みによる形状変形

NURBS 曲線と NURBS 曲面は制御点と重みにより形状を変化させることができる。Fig 2.2.7 は曲線の形状変形の様子を示したものである。同図(a)のように、制御点 P_2 を移動すると曲線は矢印の方向に変形する。同図(b)は制御点 P_2 の重みを変えたときの様子を示したものである。重みの値を増していくと限りなく制御点 P_2 に近づいた曲線形状になる。なお、重みは 0 から ∞ までの値をとる。



(a) 制御点の座標値変更

(b) 制御点の重み変更

Fig 2.2.7 制御点の変更に伴う曲線の変形

2.3 空間構造物における座屈問題

一般に単層ラチスドームは、骨組構造と連続体シェルとの複合された力学的特性を持ち、様々な座屈形式が発生する。シェルやラチスドームなどの構造形状が曲面で構成されるような空間構造物においては、その変位や荷重がある大きさに達すると、これまでとは全く別の平衡状態に移行し、座屈と呼ばれる不安定現象を起こす場合がある。

この座屈現象は、その構造形態によっては構造材料のもつ強度を十分に発揮することなく構造物を崩壊に至らしめる場合も少なくないことから、構造物の安全性を検討する上で重要な要因として挙げられる。

空間構造物の座屈挙動は、その幾何学的な寸法、形状に大きく依存している。このため、構造形状を決定する設計の初期段階において、安定性の高い構造形状を検討し、選択することは有効であると考えられる。

しかし、座屈は一般には非線形問題であるため、安定性の高い形状を直感的に判断するのは難しい。また、構造形状そのものと座屈荷重の関係が議論されることは少なく、その大域的な性状は明らかになっていない。

構造物の座屈荷重を算定する場合、幾何学的非線形解析により釣合経路を追い、接線剛性の特異点を求めることで評価する方法（以下、ここでは非線形座屈と呼ぶ）と、座屈前変形を無視し、線形固有値解析より近似的に評価する方法（以下、ここでは線形座屈と呼ぶ）が一般的に用いられている。座屈荷重を扱う最適化問題では最適解で複数の座屈荷重係数が重複することが知られている。

本論では目的関数に線形座屈荷重係数を採用する。線形固有値解析により近似的に座屈荷重係数を求めるものとする。

2.3.1 有限要素法における一般固有値問題

本節では、有限要素法で取り扱う固有値問題の性質を調べ、その特徴を生かした固有値解析のアルゴリズムを検討する。有限要素法に現われる固有値問題の代表的なものとしては、自由振動問題と座屈問題がある。固有値問題はつぎの形に定式化することができる。 $[A]$ と $[B]$ を与えられた $n \times n$ の正方マトリックスとすると

$$[A]\{x\}=\lambda\{x\}: \quad \text{標準固有値問題(2.3.1)}$$

(standard eigenvalue problem)

あるいは

$$[A]\{x\}=\lambda[B]\{x\}: \quad \text{一般固有値問題(2.3.2)}$$

(generalized eigenvalue problem)

上式を満たすスカラー量 λ は固有値(eigenvalue)とよばれ、 $\{x\}$ は固有ベクトル(eigenvector)

とよばれる。 $[A]\{x}$ あるいは $[B]\{x}$ は n 次元空間におけるベクトル $\{x\}$ の線形写像と考えられるが、標準問題においては、線形写像 $[A]\{x}$ によって方向が変化しないベクトル $\{x\}$ が存在するかどうかを調べることであり、また、ベクトルの長さの変化の比 λ は幾らになるかを同時に調べることである。また一般固有値問題では、二つの線形写像 $[A]\{x}$ と $[B]\{x\}$ の方向が一致するベクトル $\{x\}$ およびその長さの比 λ を求めることと考えることができる。

式(2.3.2)の $[B]$ を $[I]$ とすれば標準問題となるので、以下、式(2.3.2)で説明することにする。式(2.3.2)を書き直すと

$$([A]-\lambda[B])\{x\}=\{0\} \quad (2.3.3)$$

$\{x\}=\{0\}$ は明らかに式(2.3.3)の解であるが、しかしこの解は一般に意味がないので、自明な解(trivial solution)という。

式(2.3.3)が自明な解以外の解をもつためには $[A]-\lambda[B]$ が特異でなければならないと連立1次方程式に関する定理は教える。つまり

$$\det[[A]-\lambda[B]]=0. \quad (2.3.4)$$

$\det[[A]-\lambda[B]]$ は、 $[B]$ が特異でないならば λ に関する n 次多項式であるから、代数学の定理によって、式(3)は n 個の根があることがわかる。式(2.3.4)を $[A]$ の特性方程式(characteristic equation)とよぶ。 n 個の根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を $[A]$ の固有値(eigenvalue, latent root (英))とよぶ。この n 個の λ は必ずしも異なっているとは限らない。

さて固有値 λ_i に対して、少なくとも一つの自明でないベクトル解 $\{x\}=\{v\}_i$ が得られる。

$$([A]-\lambda_i[B])\{v\}_i=\{0\}, \text{ あるいは } [A]\{v\}_i=\lambda_i[B]\{v\}_i \quad (2.3.5)$$

このとき、 $\{v\}_i$ を λ_i に対する固有ベクトル(eigenvector, characteristic vector, latent vector)とよぶ。定義によって $\{0\}$ は固有ベクトルではない。ただし固有値として $\lambda=0$ を含んでもかまわない。 $[A]$ が特異マトリックス(\det は $[A]$ が零となる正方マトリックス)のときのみ、 $\lambda=0$ が固有値となる。また $\{v\}_i$ は式(4)の斉次方程式の解であるので、 $\{v\}_i$ の各成分の絶対値は定まらず、互いの比のみが決まる。

式(4)は $i=1,2,\dots,n$ に対して、 n 個の式が得られるが、これを一つの式で書くことにする

$$[A][V]=[B][V][\Delta].$$

$$[V]=[\{v\}_1 \{v\}_2 \cdots \{v\}_n]$$

$[V]$ は固有ベクトルを並べたマトリックスで、モード・マトリックス(modal matrix)とよばれる。

有限要素法に現われる自由振動問題と座屈問題について、これらの固有値問題の性質をまとめるとつぎのようになる。自由振動問題においては、以下の $[A]$ は剛性マトリックス $[K]$ であり、 $[B]$ は質量マトリックス $[M]$ である。座屈問題においては $[A]$ は剛性マトリックス $[K]$ であり、 $[B]$ は幾何剛性マトリックス $[KG]$ である。

(a)一般に標準問題 $[A]\{x\}=\lambda\{x\}$ でなく、つぎの形の一般固有値問題となる。

$$[A]\{x\}=\lambda[B]\{x\}$$

(b)[A]も[B]も実対称マトリックスとなることが多い。

(c)[A]も[B]も零要素を多く含む（粗である）。

(d)[A]あるいは[B]のいずれかは正定値マトリックスであることが多い。あるいは容易に正定値マトリックスにすることが可能である。

(e)すべての固有値を求めることは稀で、その一部を求めればよい。

2.3.2 固有値解析法

固有値問題の解法は数多くの方法が用意されている。現在おもに用いられている代表的な解法を列挙すると、つぎのようである。

- (1)ベキ乗法(power iteration method)。
- (2)逆ベキ法(逆反復法、inverse iteration method)。
- (3)サブスペース法(subspace iteration method)。
- (4)Jacobi 法(Jacobi method)。
- (5)Householder 法(Householder method)。
- (6)QR 法(QR method)。
- (7)行列式法(デターミナント法、determinant search method)。
- (8)Sturm 列法(Sturm sequence method)。

以上の解法は大きく分けて、繰返し法、相似変換に基づく方法、代数学的方法とに分けることができる。

2.4 組合せ最適化理論

離散構造物の形態創生における問題の多くは、組合せ最適化問題として定式化できる。例えば、トラスのトポロジー最適化問題は、部材の配置候補位置から実際に部材を配置させる位置の最適な組合せを求める問題である。また、部材断面を設計変数とする場合にも、それらは与えられた製品リストの中から選択される場合が一般的であるため、部材の種類 of 組合せ最適化問題となる。このような組合せ最適化問題は、部材の存在を 0 と 1 の整数値を用いて表すことにより、0-1 計画問題として定式化できる。また、選択できる部材の種類が複数個ある場合には、一般の整数計画問題となる。

一般的な組合せ最適化問題における定式化として、目的関数 F と制約条件が非負変数 X_j ($j = 1, \dots, N$) の線形関数であるとした場合の定式化が今野らにより行われている。係数行列の成分を A_{ij} , D_{ij} , 定数ベクトルの成分及びコスト係数を B_i , E_i , 及び C_j とし、等式及び不等式制約条件を有する整数計画問題が以下で表現される。

$$\text{Minimize} \quad F = \sum_{j=1}^N C_j X_j \quad (2.4.1)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^N A_{ij} X_j \geq B_i, (i = 1, \dots, N^B) \quad (2.4.2)$$

$$\sum_{j=1}^N D_{ij} X_j = E_i, (i = 1, \dots, N^E) \quad (2.4.3)$$

$$X_j : \text{非負の整数 } (j = 1, \dots, N)$$

本研究ではラチスシェル構造物における節点座標値の修正、規格化された部材断面寸法決定問題を扱う。本研究における決定問題は、断面を離散変数、節点 Z 座標値を連続変数とするため混合整数計画問題に分類されるが、節点 Z 座標値を離散化した変数と捉えることで離散変数の整数計画問題に帰着できる。

整数計画問題は、その形式によっていくつかの典型的な問題に分類され、それぞれに対して有効な手法が提案されている。

解の可能領域が組合せ集合となる組合せ最適化では、実数集合を対象とした連続性や微分 of 概念に基づく古典的な最適化手法を直接利用することはできない。したがって、組合せ最適化問題 of 解法は連続変数の最適化と本質的に異なるものであり、一般に解を数え上げるという手法である列挙法や分枝限定法などのアプローチを取らざるを得ない。

しかし、組合せ最適化問題では入力サイズが増加すると、組合せ数が指数関数で増加するので、有限であっても膨大な数にのぼることが多く、これらをすべて列挙するのは現実的に不可能であることが指摘されている。

2.4.1 遺伝的アルゴリズム

解の組合せ数が膨大になる困難な組合せ最適化問題では、解を求めるために大きく二通りのアプローチが考えられている。一つ目に最適解を算出することは諦めずに、最適解が求まるまで計算を行うアプローチがある。このようなアプローチは、一般に厳密解法と呼ばれる。二つ目に、アルゴリズムが必ず設定時間で終了することを保証するかわりに、得られる解は必ずしも最適解であるという保証を持たないアプローチがある。このように、解の収束などの理論的保証がなくても、何らかの望ましい解が得られることが経験的に分かっている手法を発見的な手法あるいはヒューリスティックスという。工学的には計算時間が膨大にならないという保証は実設計業務における設計支援ツールへの発展を考えるにあたり重要であり、大域最適解が得られなくても近似解を簡単な手続きで求めることができれば十分であるといった考え方が用いられる事が多い。よって、本論では後者の発見的なアプローチによる最適化手法を採用する。以下にヒューリスティックスの中で本論に用いる遺伝的アルゴリズム（以下 GA）について示す。

遺伝的アルゴリズム（Genetic Algorithm）

GA は、現在最も多く研究されているヒューリスティックスの一つであり、生物の進化のメカニズムにならった探索アルゴリズムである。GA と古典的な手法との相違点を以下に示す。

- i) 設計変数そのものではなく、設計変数の記号化によって構成される
- ii) 単一の点によって探索するのではなく、点の集団（個体群）によって探索される
- iii) 微分係数などの情報によって探索を進めるのではなく、目的関数の値のみを用いて探索を進める
- iv) 決定的なルールではなく、確率的なルールを用いる

本研究で用いる単純遺伝的アルゴリズム(Simple Genetic Algorithm)を以下に示す。

- [1] 問題を、遺伝子に対応する文字列(string)に変換する。
- [2] 文字列の集団(population)を発生させる。
- [3] この文字列を評価し、適合度 *fitness* を計算する。
- [4] 評価値の高い集団を選んで残す淘汰を行う。
- [5] 選ばれた集団に対して、以下に示すオペレーターを施すことにより新しい文字列を生成する。
 - i) 文字列を複製する機能をもつ自己再生(copy)
 - ii) 二つの文字列に対して部分的な交換を行うことによって新しい文字列を生み出す交叉(crossover)
 - iii) 文字列を複製する時に確率的に誤りを生じさせる突然変異(mutation)
- [6] 指定条件を満たすまで[2]～[5]を繰り返す。

GA におけるフローを Fig2.4.1 に示す。

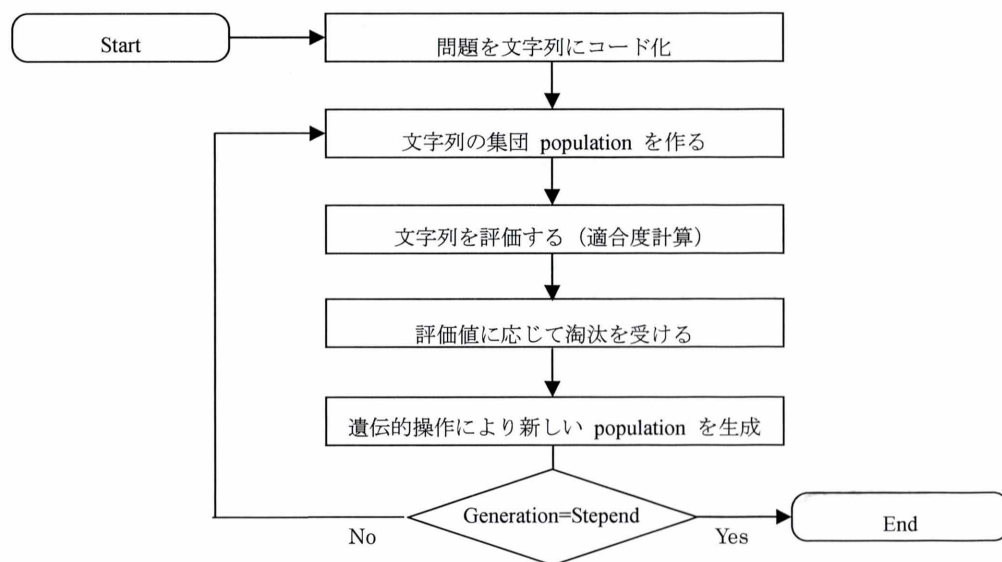


Fig2.4.1 遺伝的アルゴリズム

2.4.2 多層型遺伝的アルゴリズム

通常の GA では複数のパラメータからなる目的関数の全ての変数に対してコーディングを行う際、一本の染色体としてコーディングを行う。しかし、一度コード化された変数はその性質に関係なく一律の処理が行われる問題がある。自然界における生物を考えると生物は複数の染色体を持ち、それぞれが独自の表現型情報をもっており、異なった種類の情報を保持した染色体同士が交叉することはない。GA にもその概念を適応し、異なった情報を保持する変数をそれぞれ独立した染色体として、複数の染色体の重ね合わせによって個体の構造体(表現型)を表現することのできる多層型遺伝的アルゴリズムが河村らにより提案されている。

本論では多層型 GA を採用し、断面と節点 Z 座標それぞれの変数の性質を考慮した GA 操作を行う。

2.4.3 染色体の重ね合わせによる個体表現

複数の染色体の重ね合わせは Fig.2.8 で表される。断面染色体は各部材に割り当てられた鋼材性能の分布図を表している。また、節点 Z 座標染色体は、グランドストラクチャーの各節点の高さ方向の位置を示す。

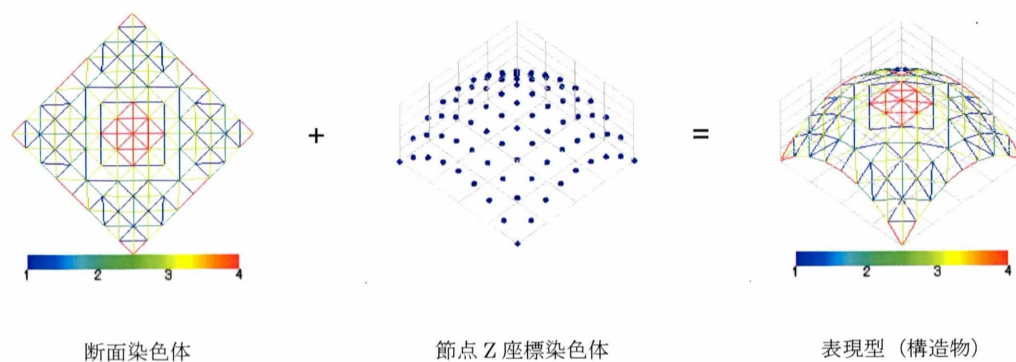


Fig2.4.2 染色体の重ね合わせによる個体表現

本論に用いる多層型遺伝的アルゴリズムのフローGAのフローを Fig2.4.3 に示す。

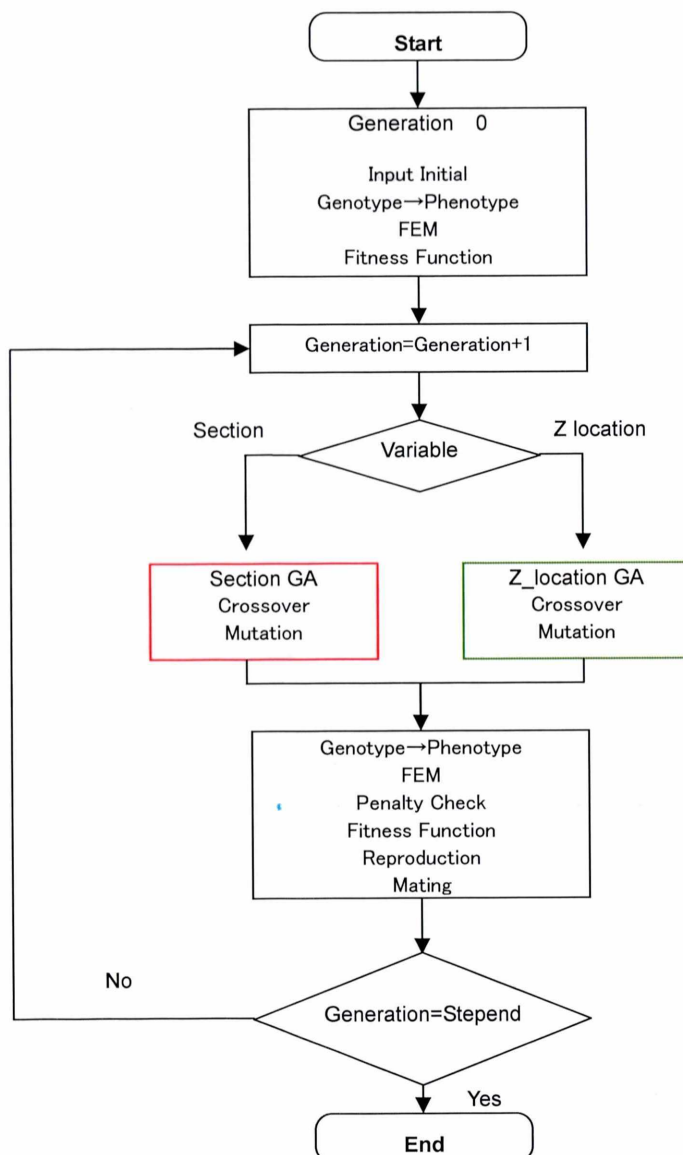


Fig2.4.3 多層型遺伝的アルゴリズム(Multiple-Layered GA)

2.4.4 対称条件による遺伝子数削減手法

GA は計算の並列化と、ランダムサーチを一定の確率で導入することにより局所解への早熟な収束を防ぐことが出来る。しかし、組合せ最適化問題では変数の数により組合せ数が指数関数で増加するため、計算時間が冗長となることが指摘される。GA による最適化手法の実用化を目指すにあたり、探索時間の削減と、構造力学の見地から不合理な解の発生を抑制するための探索領域を削減する手法を考案する必要がある。本論では、GA にて探索を行う際の変数の捉え方（表現型から遺伝子型へのコーディング）において構造物の対称条件と NURBS による節点数の削減に着目し、組合せ数を削減することを試みる。なお、コーディングは断面と節点 Z 座標共に 2 進数(binary code)にて行っている。

(a) 断面遺伝子

本論で用いる解析モデルは全て水平投影面において対称性を持つ形状とした(Fig2.4.4)。節点数 10×10 のシェルモデルを検討対象とし、対称性を用いて節点数 5×5 の $1/4$ シェルモデルを解析領域とする。

さらに断面遺伝子において遺伝子の対称性を導入する。支持点とシェル中央点を結んだ軸に対して対称な部材配置が存在する場合は同一鋼材とみなした。Fig2.4.4-a に対称な部材が存在するコーディング領域を、Fig2.4.4 -b に対称部材が存在しないコーディング領域を示す。

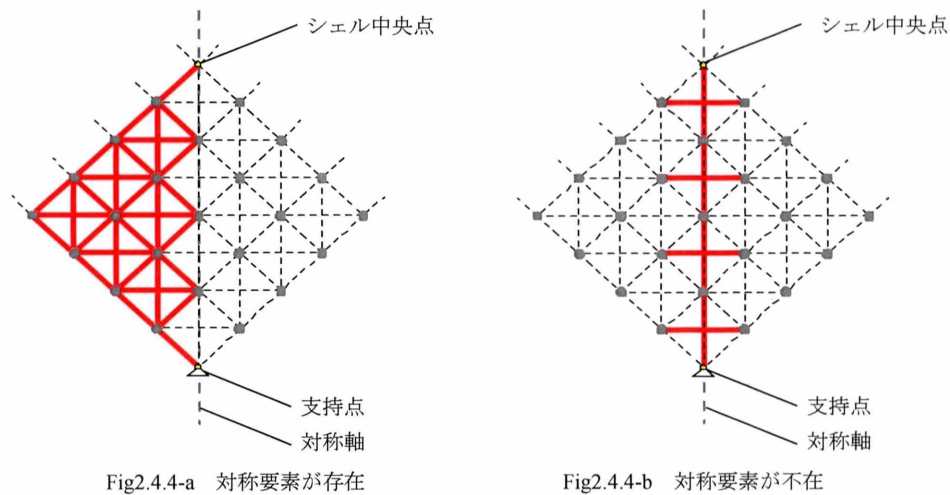


Fig2.4.4 断面遺伝子の対称性

各部材におけるこうざい断面種類は 2 進数でコーディングされ、鋼材 k 種類における各部材の遺伝子長さ bit は、次式で表される。

$$bit = [\log_2 k + 1] \quad (2.4.4)$$

全遺伝子長 L_s は全部材配置パターン数を N とすると、

$$L_s = N \times bit \quad (2.4.5)$$

となる。また、鋼材の組み合わせ数 C_s は、

$$C_s = k^N \quad (2.4.6)$$

と表すことができる。

対称要素が存在するコーディング領域の部材数を $N1$ ，存在要素が存在しないコーディング領域の部材数を $N2$ とすると、

$$N = 2N1 + N2 \quad (2.4.7)$$

対称条件を用いた場合の全遺伝子長 L' ，鋼材の組み合わせ数 C' は

$$L'_s = (N1 + N2) \times bit \quad (2.4.8)$$

$$C'_s = k^{(N1 + N2)} \quad (2.4.9)$$

また2進数より、

$$C'_s = 2^{L'_s} \quad (2.4.10)$$

と表され、全遺伝子長は $N1 \times bit$ ，組み合わせ数は k^{N1} で削減され、指数関数で解析領域を削減することができる。

(b) 節点 Z 座標遺伝子

節点 Z 座標遺伝子では、節点数 5×5 の 1/4 シェルモデルに NURBS を用いて制御点 4×4 の 1/4 シェルモデルとし解析を行った。その制御点 4×4 の 1/4 シェルモデルを Fig2.4.5 に示す。25 節点の 1/4 シェルモデルが NURBS によって 16 節点の 1/4 シェルモデルになり、節点を減らすことができる。

断面の時と同様に、節点 Z 座標においても遺伝子の対称性を導入する。支持点とシェル中央点を結んだ軸に対して対称な節点が存在する場合は同一の節点情報を持つとみなした。Fig2.4.5-a に対称な部材が存在するコーディング領域を、Fig2.4.5-b に対称部材が存在しないコーディング領域を示す。

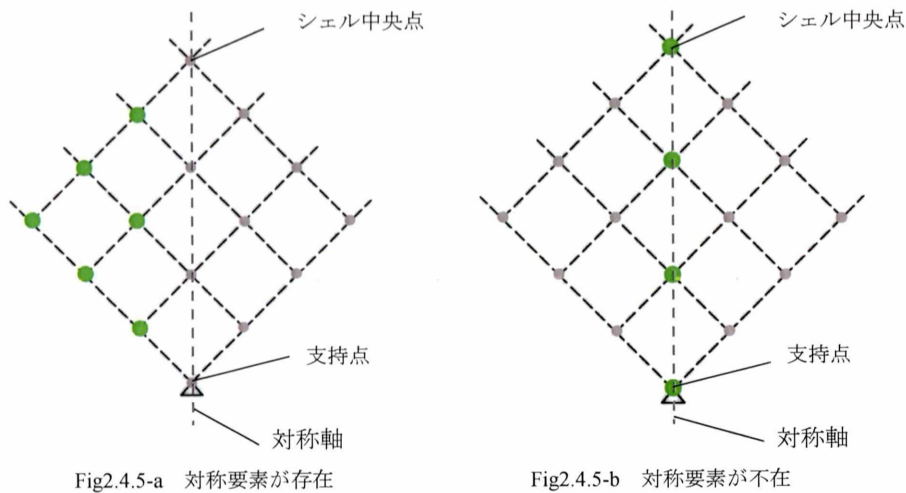


Fig2.4.5 節点 Z 座標遺伝子の対称性

変数を節点 Z 座標とし，原曲面から h (m) を上限高さとしたとき，節点 Z 座標は連続数であるため現象型である節点 Z 座標から GA における遺伝子型 2 進数配列にコーディングをする際に連続変数の離散化を施す必要がある。

各節点の遺伝子長さを bit とすると，連続数である節点 Z 座標の分割数 D は以下で示される。

$$D = 2^{bit} \quad (2.4.11)$$

個体のシェル 1/4 領域における節点 Z 座標の全遺伝子長 L_z は全節点数を N とすると，

$$L_z = N \times bit \quad (2.4.12)$$

となる。また，節点情報の組合せ数 C_z は，

$$C_z = D^N \quad (2.4.13)$$

と表すことができる。

対称要素が存在するコーディング領域の節点数を $N1$ ，対称要素が存在しないコーディング領域の節点数を $N2$ とすると，

$$N = 2N1 + N2 \quad (2.4.14)$$

対称条件を用いた場合の全遺伝子長 L'_z ，節点情報の組み合わせ数 C'_z は

$$L'_z = (N1 + N2) \times bit \quad (2.4.15)$$

$$C'_z = D^{(N1+N2)} \quad (2.4.16)$$

また 2 進数より，

$$C'_z = 2^{L'_z} \quad (2.4.17)$$

と表される。

対称性によって全遺伝子長には $N1 \times bit$ ，節点情報の組み合わせ数は D^{N1} で削減され，第 2.3.5 小節(a)にて示した断面変数の組合せ数と同様に指数関数で解析領域を削減することができる。

また，離散化された変数の間隔 ΔZ は， h を用いて以下で表わされる。

$$\Delta Z = \frac{h}{D} \quad (2.4.18)$$

Table 2.1 に本論で用いるモデルにおける解析領域を示す。なお、本論を通して断面性能は鋼材4種類の組み合わせを想定し、節点Z座標は分割点を $2^4 = 16$ 個としている。また、本論では支持点は動かないので節点を1つ減らしている。遺伝子数を減らすことにより組合せ数が大幅に減少したことが確認できる。

Table 2.1 Variable Size

遺伝子	要素	要素数 N		遺伝子長さ L		組み合わせ数(パターン数) C	
		改良前	改良後	改良前	改良後	改良前	改良後
断面遺伝子	線 (部材)	72	40	144	80	2.23×10^{43}	1.21×10^{24}
節点Z座標	節点	24	9	96	36	7.92×10^{28}	6.87×10^{10}

また、本研究では2変数の多層型GAの最適化問題を行うので、組み合わせ数 C' は(2.4.10)や(2.4.17)から求められて、

$$C' = 2^{(L'_Z + L'_s)} \quad (2.4.18)$$

よって、改良後の2変数の組合せ数は、 8.31×10^{34} 通りになる。

2.5 単一目的最適化手法

2.5.1 単一目的最適化問題

一般に、最適化問題 (optimization problem) は、「目的関数 (objective function)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

を、制約条件 (constraints)

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S \subset X$$

のもとで最小にする解を求めよ」と定式化されている。ここで $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は、基本空間 X の変数 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ のすべての有限な値に対して定義される実数値関数である。また、 S は、決定変数 x に対する基本空間 X の部分集合で、制約条件を満たす x の集合を表しており、実行可能領域 (feasible region) という。さらに、すべての制約条件を満たす x を実行可能解 (feasible solution) という。

ここでは、このような最適化問題を簡単に

$$\begin{aligned} &\text{minimize } f(x) \\ &\text{subject to } x \in S \subset X \end{aligned}$$

と書き表すことにする。最適化問題に対しては、目的関数に (-1) を掛けて最小化問題に変換できるので、最適化手法では、最小化問題のみを取り扱うことにしても一般性を損なうことはない。

2.6 多目的最適化手法

一般に最適化とはある1つの評価 (目的) に対する最適化を行う単一目的最適化のことを意味する。しかしながら、実世界に存在する様々な最適化問題を考えた場合、複数の評価基準を同時に考慮すべき問題は少なくない。このように、複数の評価基準が存在し、これらの評価基準を同時に考慮しながら最適解を探索する問題を多目的最適化問題と呼ぶ。多くの多目的最適化問題では、評価基準の間に何らかのトレードオフの関係があり、単一の最適解を得ることは難しい。そのため、多目的最適化では Pareto 最適解という別の概念を用いて解探索を行い、その Pareto 最適解を求めることが第1の目標となる。しかし、単一目的の場合と異なり目的関数が複数存在するため、単一目的最適化手法をそのまま多目的へ用いることはできない。そのため、従来より多目的を何らかの形で単一目的化して最適化を適用する多目的計画法が提案され、適用されてきた。

しかし、これらの手法に共通するのは1度の探索で Pareto 最適解集合の1つしか求めることができない点である。しかも、これらの多目的計画法では各評価項目に対する解選好者の何らかの重み付け、もしくは順位付けを事前に決定する必要がある。一般に、多目的最適化では各評価項目を統合して扱うことができない。また、各評価項目の優先度を定義できない場合が多い。そのため、各評価項目の優先度をあらかじめ定義する必要があり、かつ1度の探索で Pareto 最適解集合の1つしか求められない多目的計画法は、多目的最適

化問題を解く上で、最適な手法とはいえない。

Schaffer の研究によって始まった進化的多目的最適化に関する研究は、近年ますます盛んに行われるようになり大きな進歩を見せている。この分野では、様々な進化的なアルゴリズムが適用されているが、特に遺伝的アルゴリズムを多目的最適化問題に適用した多目的遺伝的アルゴリズム(Multiobjective Genetic Algorithm) は、最も主要な研究となっている。多目的遺伝的アルゴリズムでは、設計領域内に遺伝子を生成し、交叉により新たな遺伝子を発生させ何らかの方法で選択することにより、Pareto 最適解集合を探索する。遺伝的アルゴリズムの探索過程における、その時点での最も良好な解、すなわち母集団全体の中で他のどの個体と比較しても優越されていない個体を、どの解にも支配されていない、劣っていない解という意味で非劣個体または非劣解と呼び、非劣解集合を Pareto 最適解集合へ近づけることが多目的遺伝的アルゴリズムの目的となる。

一般に Pareto 最適解集合が形成する曲面のことを Pareto 最適フロントと呼び、それと区別するため遺伝的アルゴリズムの各世代における探索により得られた非劣解集合が形成する面を解の近似 Pareto 最適フロント(near Pareto optimal front) と呼ぶ。概念としては、世代が進むに従い個体の作り出す近似 Pareto 最適フロントは、Pareto 最適フロントに近づいていくものとして捉えることができる。

遺伝的アルゴリズムを多目的最適化問題に対して適用する場合、この非劣解集合を適切に評価し、次世代に残していくことがポイントとなる。従来の「1 つの最適解」を求める単一目的の場合と異なり、多目的では他の解に劣っていない解 (Pareto 最適解) 全てが解候補となる。一般に、多くの単一目的遺伝的アルゴリズムでは評価値をそのまま適合度値として用いているため、単純に単一目的における適合度の割当て方法は、そのまま多目的最適化問題に適用させることはできない。すなわち、複数の評価値を基に単一の適合度値を求める必要がある。その点に関して、従来、以下の 2 つの考え方に基づいて、種々の方法が提案されている。

- 解の優越関係を用いない選択演算を行う (非 Pareto 的アプローチ)
- 解の優越関係に基づいて選択演算を行う (Pareto 的アプローチ)

非 Pareto 的アプローチは、1985 年に初めて多目的に遺伝的アルゴリズムを適用したアルゴリズムであり、Schaffer のベクトル評価遺伝的アルゴリズム(Vector Evaluated Genetic Algorithm, VEGA) に始まり 1990 年代前半までに提案されたアルゴリズムに多く見られるアプローチである。

一方、Pareto 的アプローチは、既に説明した Pareto 最適解の概念を用いた手法で 1989 年に Goldberg により提案された非優越ソートに始まり、1993 年に Fonseca により提案された MOGA (Multi-Objective Genetic Algorithm) などが代表的である。近年提案されたアルゴリズムの多くはこのアプローチに分類される。

2.6.1 多目的遺伝的アルゴリズム (SPEA2)

SPEA2 (Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2, Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm)は, SPEA の改良アルゴリズムとして Zitzler らによって 2001 年に提案された。SPEA は 1999 年に提案された比較的新しい探索性能に優れたアルゴリズムである。しかし, 1999 年から 2001 年までの間には, NSGA-II をはじめとして重要なアルゴリズム, メカニズムが提案され, SPEA には幾つかの改良点があることが明確になった。そこで, さらに効率の良い高性能な探索を行うため, 幾つかの重要な改良を加え提案されたのが SPEA2 である。SPEA と比較した SPEA2 の主な特徴を以下に示す。

■改良した適合度割当て手法

これは, 各個体に対してどれだけ多くの数の個体をその個体が支配しているか, 支配されているかを考慮した手法である。この適合度割当てには, 個体の優越度合いと密集度の両方が考慮されている。

■新たなアーカイブ端切り手法

この手法は, アーカイブ個体群を適切な数に削減するために用いられる。この手法では, 得られた非劣解集合の各目的軸における端の個体が保存されることを保証している。

■アーカイブ個体群と探索個体群の扱い

SPEA2 では, 常にこれまでの探索で発見した N 個体の優良解をアーカイブに保存する。また, アーカイブ個体群から探索個体群をさらに選択して, アーカイブ個体群のより優れた個体を再抽出して各遺伝的操作を用いた探索を行っている。

以下, 本研究で用いる SPEA2 のアルゴリズムの流れ, 適合度割当て手法, アーカイブ端切り手法を用いたアーカイブ個体群の更新について解説する。

アルゴリズムの流れ

SPEA2 のアルゴリズムの流れは NSGA-II に非常に似ている。これは、2 つの母集団（アーカイブ母集団 \bar{P} 、探索母集団 P ）を用いて探索を行う点、アーカイブ母集団から探索母集団を選択する点、探索母集団を用いたアーカイブ母集団の更新を行う点などアルゴリズムとして共通する部分が多いからである。

SPEA2 の基本概念図を Fig2.6.1 に示す。

- Step1 初期化 初期母集団 P_0 とそれとは別の空のアーカイブ \bar{P}_0 を生成する。($t=0$)
- Step2 適合度割当て P_t と \bar{P}_t における個体適合度を計算する。
- Step3 環境選択 P_t における全ての非劣個体を \bar{P}_t へコピーしアーカイブ母集団 \bar{P}_{t+1} とする。 $|\bar{P}_{t+1}| \neq \bar{N}$ の場合は P_t における優良個体もしくは端切りオペレータを用いて個体数を \bar{N} にする。
- Step4 終了判定 $t \geq T$ もしくはその他の終了条件が満たされた場合、 \bar{P}_{t+1} 中の非劣個体群が最終的な非劣解として出力され探索は終了する。そうでなければ Step5 へ進む。
- Step5 メイティング選択 \bar{P}_{t+1} からバイナリトーナメント選択によって N 個分の探索母集団 P_{t+1} を選択する。
- Step6 変化 P_{t+1} に対して交叉と突然変異オペレータを実行し Step2 へ戻る。($t=t+1$)

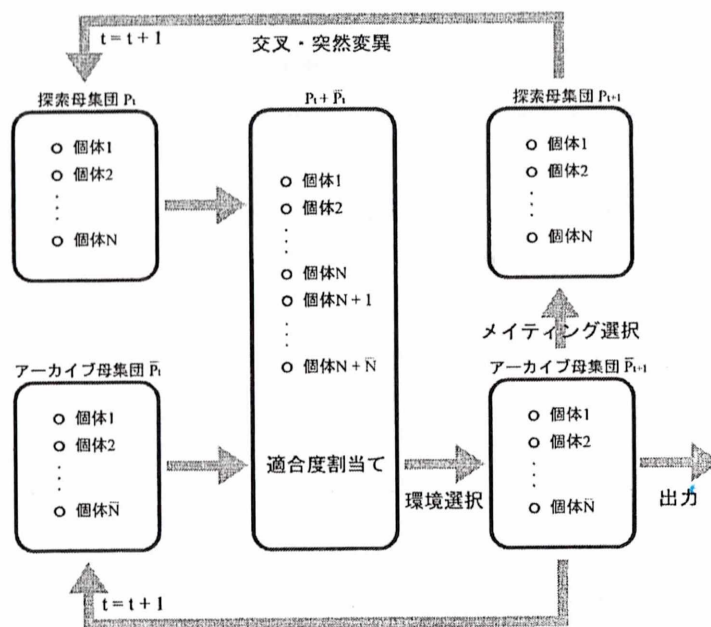


Fig2.6.1: SPEA2 の基本概念図

前述の環境選択(envIRONMENTAL selection)およびメイティング選択(mating selection) について説明する。

一般に、新たに得られた探索個体群 P_t を用いて保存しているアーカイブ個体群 \bar{P}_t を更新する場合、探索個体群 P_t とアーカイブ個体群 \bar{P}_t から選択操作を用いて新たなアーカイブ個体群 \bar{P}_{t+1} を生成する。この選択操作のことを環境選択と呼ぶ。

一方、アーカイブ個体群から探索個体群を選択することをメイティング選択という。交叉(mate) などの遺伝的操作を行う個体群の選択という意味でメイティング選択と呼ばれる。これは、探索をより優れた個体のみで行うためである。SPEA2 ではバイナリトーナメント選択が用いられている。

適合度割当て

SPEA2 では、まず全ての個体 i に対して、その個体の強度として、支配している個体の数 $s(i)$ を求める。

$$s(i) = \left| \{j \mid j \in P_t + \bar{P}_t \wedge i \succ j\} \right| \quad (2.6.1)$$

ここで、 $i \succ j$ は j が i に支配されていることを示している。

次に個体 i の生適合度(raw fitness) $r(i)$ は、その支配している個体の持つ強度 s を全て足し合わせた値となる。そのため、個体 i が非劣個体の場合、生適合度は 0 となる。

$$r(i) = \sum_{j \in P_t + \bar{P}_t, j \succ i} s(j) \quad (2.6.2)$$

しかしながら、 $r(i)$ を用いた適合度割当ては、支配関係の概念に基づいた一種のニッチのメカニズムを提供するが、個体が互いに支配関係にない場合、不適切である可能性がある。したがって、目的関数空間における個体の混雑状態（密集度）の情報を付加することで、同一の生適合度値の個体同士を区別する必要がある。SPEA2 では、Silverman による k 最近傍法(k -th nearest neighbor method) を採用し、 k 最近傍個体との距離 σ_i^k の逆数を密集度(density) の評価として用いている。よって密集度 $d(i)$ は $k = \sqrt{N + \bar{N}}$ として次式で表現される。

$$d(i) = \frac{1}{\sigma_i^k + 2} \quad (2.6.3)$$

ここで、分母に 2 を足しているのは $0 < d(i) < 1$ を保証するためである。

最終的に $d(i)$ を生適合度 $r(i)$ に加算して個体 i の適合度 $f(i)$ とする。

$$f(i) = r(i) + d(i) \quad (2.6.4)$$

SPEA および SPEA2 における適合度割当ての比較例を Fig2.6.2 に示す。

SPEA2 では、より多くの個体を支配している非劣個体の $s(i)$ は、高くなる。そのため、そのような非劣解に支配されている個体の適合度は悪くなる。一方、SPEA の場合と異なり SPEA2 では、非劣解に対しては同等の最も高い適合度が割当てられている。そのため、SPEA に比べ Pareto 最適フロントに対する収束性がより強くなっていることが分かる。

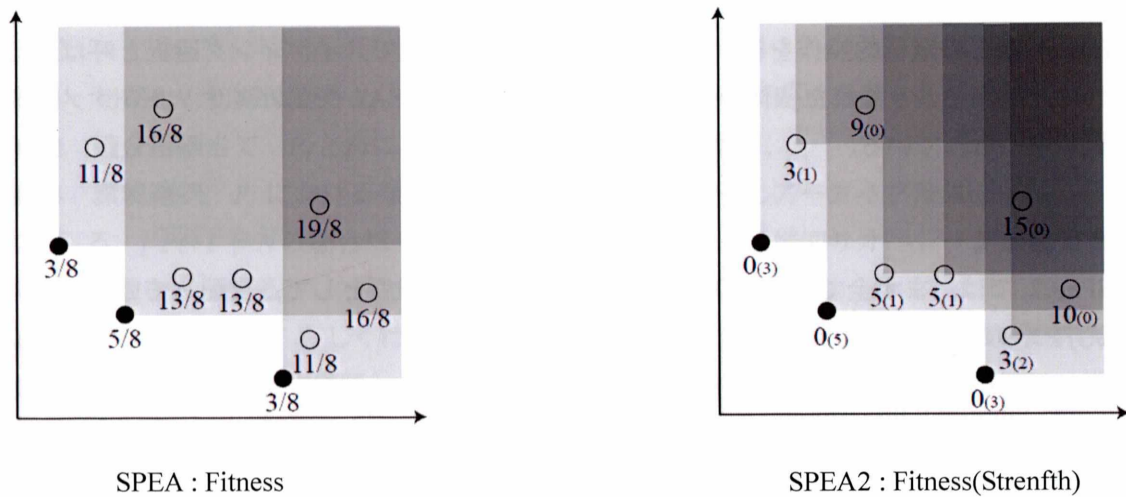


Fig2.6.2: SPEA および SPEA2 における適合度割当ての比較

環境選択

SPEA2 でのアーカイブ母集団の更新は, SPEA と比較して次の 2 点において異なっている。

1. アーカイブ母集団の個体数が常に一定である。
2. 過剰な非劣解の削減方法として, アーカイブ端切り手法(archive truncation method)という境界の個体を取り除くことを防ぐ手法を用いている。

SPEA2 における環境選択では, 最初のステップとして全ての非劣個体をコピーする。すなわち, アーカイブ $\overline{P_t}$ と探索母集団 P_t から最良の適合度値 0 を持つ個体を $\overline{P_{t+1}}$ へコピーする。

$$\overline{P_{t+1}} = \left\{ i \mid i \in P_t + \overline{P_t} \wedge F(i) < 1 \right\} \quad (2.6.5)$$

もし, 非劣個体の数がアーカイブ母集団サイズの上限 \overline{N} と同値の場合 ($|\overline{P_{t+1}}| = \overline{N}$), 環境選択のステップは終了する。一方, 非劣個体の数がアーカイブ母集団サイズの上限以下の場合, 上限以上の場合もある。

前者 ($|\overline{P_{t+1}}| < \overline{N}$) の場合, 前のアーカイブにおける最良の $\overline{N} - |\overline{P_{t+1}}|$ 個の優越個体と母集団が新しいアーカイブとしてコピーされる。具体的には, まずアーカイブ母集団と探索母集団を足し合わせた個体集合 $P_t + \overline{P_t}$ を生成する。個体集合 $P_t + \overline{P_t}$ に対して適合度の最良値順にソートを行い, ソート個体の $F(i) \geq 1$ となる初めの個体から $\overline{N} - |\overline{P_{t+1}}|$ 個の個体 i を $|\overline{P_{t+1}}|$ にコピーすることにより実行される。また後者の上限以上 ($|\overline{P_{t+1}}| > \overline{N}$) の場合, 母集団の個体を 1 個ずつ削減するアーカイブ端切り手法を $|\overline{P_{t+1}}| = \overline{N}$ となるまで繰り返し行うことにより, アーカイブ母集団 $\overline{P_{t+1}}$ の個体数を \overline{N} としている。

アーカイブ端切り手法のアルゴリズムを以下に示す。

- Step1 全ての非劣個体に対して、目的関数空間における最も隣り合う距離が最小の i と j を選択する。変数 $k=2$ とする。
- Step2 個体 i と j に対して k 番目に最も接近している個体との距離 (δ_i^k, δ_j^k) を求め比較する。ただし、 δ_i^k は、個体 i において k 番目に最も近接している個体との距離を意味する。
- Step3 もし、 $\delta_i^k > \delta_j^k$ もしくは $\delta_i^k < \delta_j^k$ の場合には、距離の短いほうの個体を削減対象とする。また、 $\delta_i^k = \delta_j^k$ の場合は $k=k+1$ として Step2 へ戻る。

このアーカイブ端切り手法の特徴は、非劣個体群の各目的の端に存在する個体が必ず削減対象とならないことである。また、必ず最も隣り合う距離の最小の個体が削減されるため妥当性が最も高いアーカイブの削減方法である。さらに、パラメータを用いない点も有利といえる。アーカイブ端切り手法の概念図を Fig2.6.3 に示す。

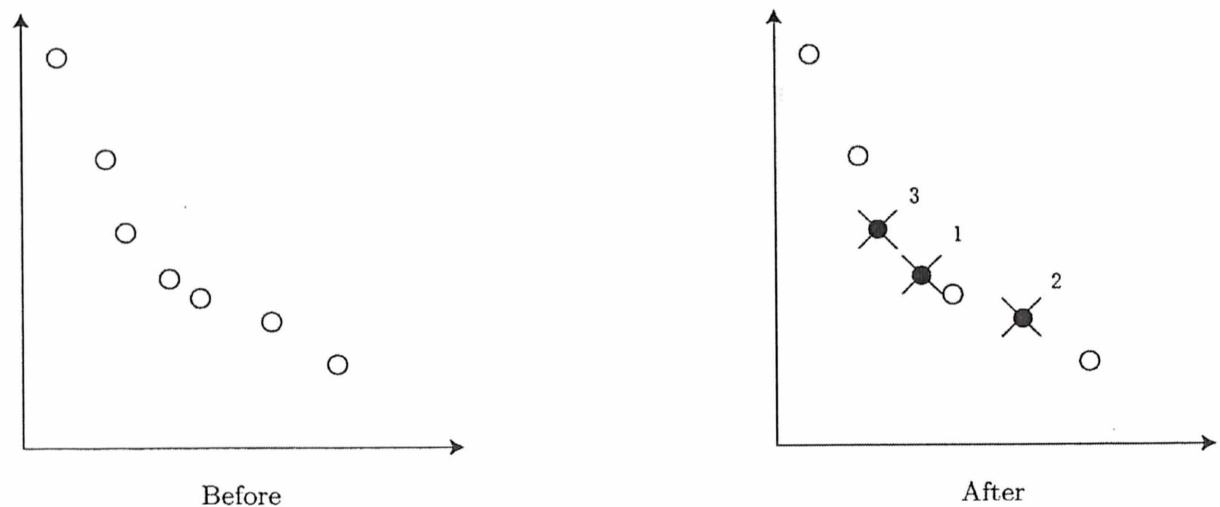


Fig2.6.3:アーカイブ端切り手法

利点

SPEA2 の最大の特徴は、探索性能の良さである。SPEA と比較しても、その探索性能は格段に向上している。アルゴリズム自体は NSGA-II に非常に似ているが、探索途中において発見した非劣解の削減方法などは NSGA-II のものよりも妥当性の高い方法を用いている。また、適合度割当てに関しても非劣解が必ず優遇されるような仕組みになっており、SPEA の場合の適合度割当て方法の欠点が改善されている。

■SPEA における適合度割当て方法の欠点

SPEA における適合度割当てでは、多くの個体を優越しているアーカイブ個体が悪い適合度となる。このような割当ては、非劣個体の近くに優越されている個体が集中している場合に対する適切な適合度割当てとなる。しかし、このような場合は非常にまれであり、本来、混雑度を重視するのはクラスタリング手法に限定するべきである。そのため、この適合度割当ては、結果として非劣個体に対して不適切な選択圧を生む可能性がある。

欠点

SPEA2 において用いられている、端切りオペレータは非常に妥当性の高いものであるが、1 度の試行において削減対象の個体を 1 つしか発見できない上、最も近接している 2 つの個体の δ^k に関して差が生じるまで個体間の比較を行う必要がある。ここ δ_i^k は、個体 i において k 番目に最も接近している個体との距離を意味する。そのため、その複雑性は高くなる。最悪の場合、端切りオペレータの複雑性は $O(M^2)(M = N + \bar{N})$ となる。ただし通常は、第 2 もしくは第 3 の近傍に関しては異なっているので、平均の複雑性は $O(M^2 \log M)$ 以下となる。

2.7 並列化手法

2.7.1 様々な並列化手法

GA は数多くの個体に対して遺伝的操作を並列に適用することができるので、本質的には並列化に向けた手法であるといえる。そのため、これまでに数多くの並列化手法が提案されてきた。実用的な観点からも大規模な問題を高速に解く必要があるため、効率的な並列化が必要である。特に、使用するプロセッサ数に比例した高速化を達成できるかという、スケーラビリティ(scalability)の実現が重要である。並列化すべき対象に応じて、以下のような方針が考えられる。

- (1) 適応度の計算を並列化する。
- (2) GA 自体(遺伝的操作など)を並列化する。
- (3) 問題自体を分割することにより並列化する。
- (4) 確率モデルの構築過程を並列化する。

適応度の計算を並列化するということが最も単純な並列化であり、その場合には特に GA に依存した処理を行う必要はなく、通常の並列化手法を用いることで対応が可能である。

次に GA 自体を並列化するというアプローチが、自然な並列化の手法として考えることができ、島モデル(island model)にもとづく並列 GA では、集団を複数の部分集団に分割することで GA を複数同時に実行し、遺伝的操作の並列処理を実現している。

問題自体を複数の部分問題に分割することによる並列化は、GA にかぎらず多くの問題において行われている並列化のアプローチであるが、問題によっては必ずしも部分問題への分割が事前にできないことが考えられる。分割が問題に依存することが考えられるが、リンケージ固定手法を用いることで、問題に依存しない一般化された手法として問題の分割を行えることが期待されている。

分布推定にもとづく手法においては、確率モデルを構築する過程に多くの計算量を必要とする。そのため、モデル構築を並列化するための手法が提案されている。以下にそれぞれについて、代表的な手法を紹介する。

マスタースレーブ方式

マスタースレーブ方式は、Fig2.7.1 に示されるように、全体の制御および遺伝的操作を集中して行うマスター(プロセッサ)と、おもに適応度の計算を並列に行う複数のスレーブ(プロセッサ)から構成される並列 GA のモデルである。具体的には、次に示すアルゴリズムをマスターおよび複数のスレーブに対して実行する。

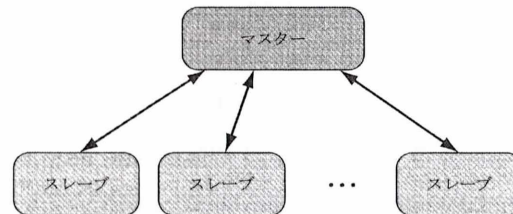


Fig2.7.1 マスタースレーブ方式

- ① マスターにおいて集団を初期化する。
- ② マスターが集団における個体をそれぞれスレーブに割り当て、送信する。
- ③ それぞれのスレーブにおいて、それが割り当てられた個体の適応度を並列に計算し、その結果をマスターへ送信する。
- ④ マスターは適応度の値を受取り、交叉、突然変異などの遺伝的操作を適用する。
- ⑤ マスターにおいて終了条件を判断する。終了条件が満たされない場合は②へ戻る。

このようにマスタースレーブ方式は、適応度計算を並列に実行するというきわめて単純かつ一般的な並列化手法であり、GA に依存した部分は特に存在しない。

島モデルによる並列 GA

島モデルとは GA の並列化を行うために、集団を複数の部分集団に分割して、それぞれに GA を実行する手法である。その概要を Fig.2.7.2 に示す。

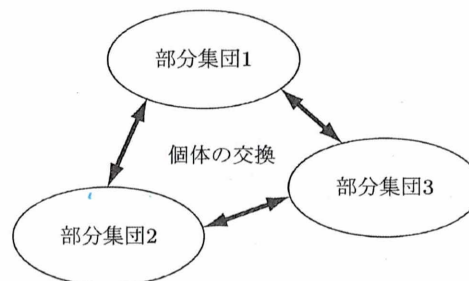


Fig2.7.2 島モデルによる並列 GA

それぞれの部分集団において並列に GA を実行されるとともに、部分集団から一部の個体を選んで交換する。島モデルによる並列 GA では、次のアルゴリズムをそれぞれのプロセッサで並列に実行する。

- ① それぞれのプロセッサに割り当てられた部分集団を初期化する。
- ② 適応度の評価, 選択, 交叉・突然変異などを(通常の GA と同様に)実行する。
- ③ 個体交換の条件が満たされた場合, 一部の個体を選び, ほかのプロセッサへ転送する。個体を受取ったプロセッサではそれを部分集団へ取り込む。
- ④ 終了条件を判断し, 満たされない場合は②へ戻る。

島モデルによる並列 GA は, 並列化手法という側面のほかに, 個体の多様性を維持するためのニッチング手法としての側面ももつ。複数の集団に分割し, 個体の交換頻度を適切に制御することで, それぞれの部分集団で異なる方向に探索が進む可能性が高くなり, 結果としてニッチングに類似した多様性維持の効果が期待できる。

探索の情報を共有するとともに, それぞれの部分集団で局所解への不十分な収束を防ぐため, 定期的もしくは集団が収束した場合に一部の個体を交換する。このはたらきにより, 単に独立した集団で並列に GA を実行した場合に比べて探索性能を向上させることが可能となる。島モデル型並列 GA の各部分集団においては,

「集団の(部分的な)収束 \Rightarrow ほかの部分集団からの新たな個体の流入」
 という過程が繰り返されているものと考えられる。

リンケージ同定アルゴリズムの並列化

マスタースレーブ方式と同様に, 全体の制御を行うマスター(プロセッサ)と, リンケージ同定および遺伝的操作を並列に実行する複数のスレーブ(プロセッサ)から構成されている。並列リンケージ同定の概要を Fig.2.7.3 に示す。

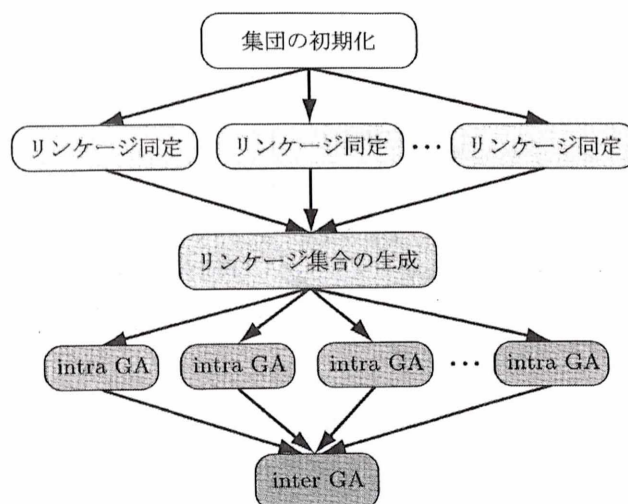


Fig2.7.3 並列リンケージ同定の概要

リンケージ同定においてリンケージの条件判断, エピスタシス尺度の計算を各遺伝子座ペア(i, j)に関してそれぞれ独立に行うことができるため, 並列化に向けた手法であるといえる。

並列リンケージ同定は, 次に示されるアルゴリズムに従って実行される。

- ① マスターにおいて, ランダムに $O(c2^k)$ 個の個体を初期化する(c :定数, k :ビルディングブロックの推定長)。
- ② マスターにおいて初期化された集団を, すべてのスレーブに転送する。
- ③ それぞれのスレーブで, 遺伝子座ペア(i, j)に関するリンケージ同定を並列に行う。
- ④ リンケージ同定の結果をマスターに集約し, それのもとづいてリンケージ集合を生成する。
- ⑤ それぞれのスレーブにリンケージ集合ごとの intra GA を割り当てて, 並列に実行する。
- ⑥ intra GA の結果をマスターに集約して, マスターにおいて inter GA を実行し, 解を得る。

並列リンケージ同定では, 問題をリンケージ集合という観点で部分問題に分割して, それぞれの部分問題の解を intra GA により並列に求めており, 問題分割によるある種の部分統治法を行うことで, 効果的な探索を実現している。

分布推定アルゴリズムの並列化

分布推定アルゴリズムでは、一般にその確率モデル構築の過程において多くの計算量を必要とする。そこで、アルゴリズムの並列化に関する研究がなされている。UMDA(univariate marginal distribution algorithm)やCGA(compact GA)など単純な確率モデルの場合には、並列化も容易であると予想されるが、確率モデルが複雑になるにつれて、その依存関係から並列化が難しくなっていく。ここでは、BOA(bayesian optimization algorithm)におけるベイジアンネットワークにもとづく確率モデル構築の並列化を紹介する。

適応度評価回数の増加が、問題サイズの上昇に関して線形であるという大きなメリットがBOAにあるが、ベイジアンネットワークの構築には問題サイズの3乗という比較的多くの計算コストを必要とするため、大規模な問題を解く場合、モデル構築の並列化が特に重要である。また、次世代の個体を生成する処理に関しても並列化することで高速化が期待される。並列BOAのアルゴリズムを次に示す。

- ① あるプロセッサにおいて初期集団を生成し、すべてのプロセッサに対してブロードキャストする。
- ② それぞれのプロセッサに対してベイジアンネットワークのノードを分割して割り当て、それぞれについてネットワークを並列に構築する。
- ③ それぞれのプロセッサにおいて生成されたネットワークを互いに交換する。これによりすべてのプロセッサが同一のネットワークを保持する。
- ④ 得られたネットワークにもとづいてそれぞれのプロセッサで並列に次世代の個体を生成し、互いに交換する。これによりすべてのプロセッサで同一の集団を保持する。
- ⑤ 停止条件が満たされれば終了、それ以外の場合は②へ戻る。

ベイジアンネットワークの構築にあたって、それがサイクルを持たないようにする必要があり、逐次計算においては辺の生成時に直接チェックすることができるが、それぞれのプロセッサで並列にネットワークの構築を行った場合、プロセッサの間で通信を行わないと不整合が生じ、サイクルが生成される可能性が生じる。一方で、頻繁に通信を行うと並列化の効率が急激に低下する。

Ocenasek らによる研究においては、ネットワークにおけるノードの優先順位を示した順列をランダムに生成して、その優先順位にしたがって辺を追加することで、プロセッサ間の通信をできるかぎり抑えつつ、サイクルの生成を防いでいる。

2.7.2 重み付き島モデルによる並列 GA

本研究で用いる並列化は、川瀬により 2009 年に提案された多目的 GA における解探索の効率化を目指した手法である。全体集団から部分集団へ分割する方法を重み付けした目的関数値に依存するものとし、ステップ毎に部分集団を再構成しなおすものとした。その概要を Fig2.7.4 に示す。

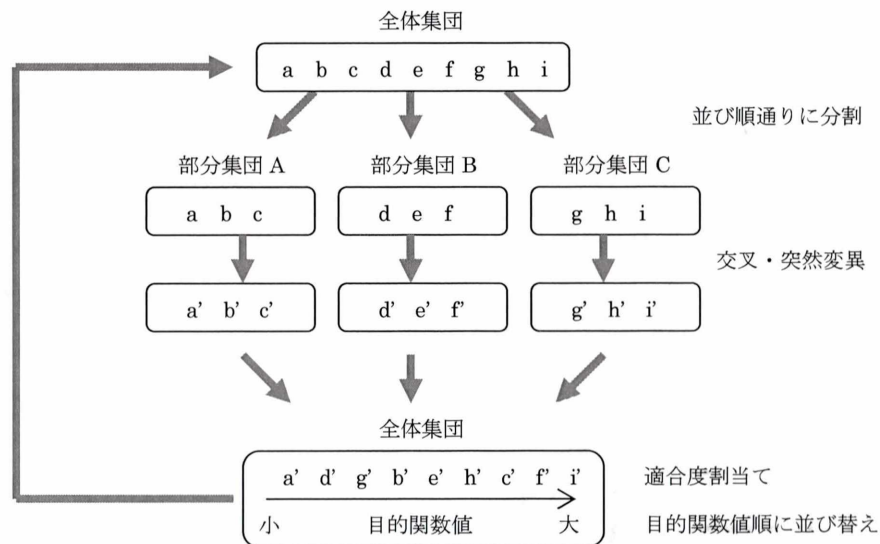


Fig2.7.4 重み付き島モデルによる並列 GA の概要

それぞれの部分集団において並列に GA を実行し、それらの部分集団を合わせ一つの新たな全体集団を生成し部分集団に分割し直すことで、部分集団どうしでの個体の交換を行う。これにより、特定の集団が無意味な探索をすることがなくなるため、探索の効率化を図ることができる。以下にそのアルゴリズムを示す。

- ① それぞれに割り当てられた部分集団を初期化する。
- ② 部分集団内で重みをつけた適合度割り当てを行う。
- ③ 部分集団内で淘汰・交叉・突然変異を(通常の GA と同様に)実行する。
- ④ 新たに生成された複数の部分集団を 1 つのあらたな集団として、全体で適合度を割当て、Pareto 解を生成する。
- ⑤ 終了条件を判断し、満たされない場合は集団を部分集団に分割し直し②へ戻る。

部分集団への分割方法を重み付けした目的関数に依存させることで、多目的に対して部分集団でそれぞれ異なる方向に探索が進む可能性が高くなり、多様性維持の効果が期待できる。また、適合度の評価方法を部分集団ごとに変化させることにより、多目的 GA においてパレート解の探索をより広域に亘って行うことができる。目的関数空間において、Pareto 最適フロントと各部分集団の探索領域の概念を Fig2.7.5 に示す。

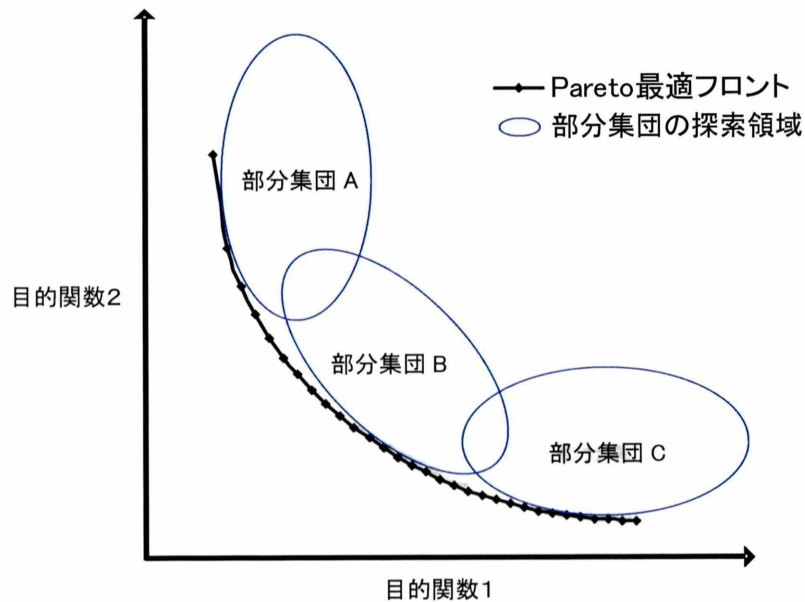


Fig2.7.5 目的関数空間における部分集団の探索領域

Fig2.7.5 では、部分集団 A では目的関数 1 の値が小さな個体を探索し、逆に部分集団 C では目的関数 2 の値が小さな個体を探索している。全ての部分集団から 1 つの新たな全体集団を生成したとき、GA 操作によって新たに生成された個体が他の部分集団の探索領域内に存在するならば、その個体は部分集団への再分割の際により適した Pareto 最適フロント付近を探索する部分集団へ移動し、部分集団間での個体の交換が行われる。この個体の交換により、それぞれの部分集団の探索の方向を一定に保ちつつ、新たな個体により局所解への不十分な収束を防ぐことができる。このはたらきにより、単に独立した集団で並列に GA を実行した場合に比べて探索性能を向上させることが可能となる。

重みをつけた分割方法

全体集団から部分集団への重みをつけた分割方法の流れを以下に示す。

- ① 全体集団から得られた非劣個体の中から目的関数1の値のみに着目し値の小さな個体から順にアーカイブ母集団の上限の1/3だけ選択し、部分集団Aとする。
- ② ①と同様に目的関数2の値のみに着目し、部分集団Cを選択する。
- ③ 残りの非劣個体を部分集団Bとする。
- ④ 探索母集団を非劣個体と同様にそれぞれの部分集団の定員まで選択する。

非劣個体とその他の個体を分けて分割するのは、先に生成した部分集団が非劣個体を多く選択してしまい、後に選択する部分集団内に非劣個体が存在しなくなるのを防ぐためである。部分集団への分割は1つの目的関数の値にのみ着目して行うため、部分集団A・部分集団B・部分集団Cの目的関数1と目的関数2の重み付けの割合はそれぞれ10:0・5:5・0:10である。

部分集団内での適合度割当て

本研究では部分集団Aと部分集団Cで重み付けの割合を10:0・0:10としているため、これらの部分集団内での探索はSPEA2で用いる他の個体との優越関係による適合度割当てではなく、単一目的の場合の適合度割当てと同様に考えることができる。また部分集団BではSPEA2で用いる適合度割当てをそのまま適用することができる。部分集団Aについて、適合度割当てを単一目的化した場合とSPEA2で用いる適合度割当てをそのまま適用した場合の比較をFig2.7.6に示す。

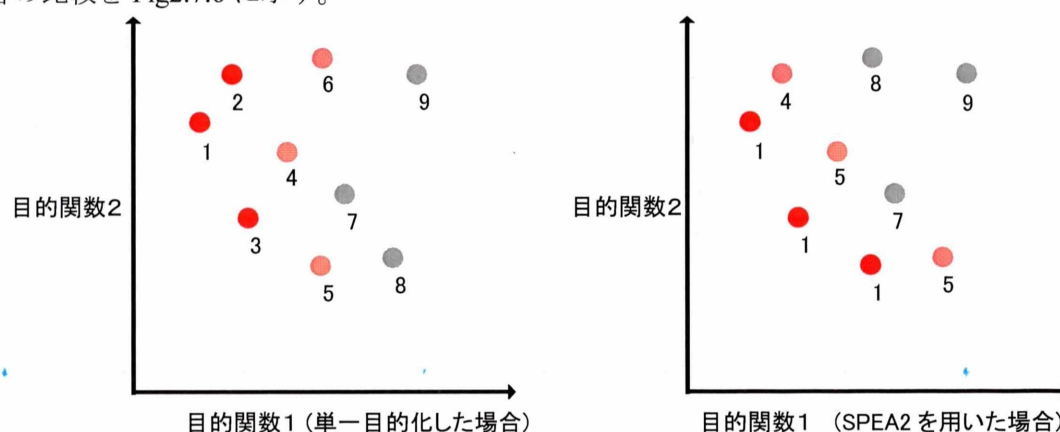


Fig2.7.6 適合度割当ての比較(数字はそれぞれの場合の適合度の順位を表す)

このようにそれぞれの目的関数の最小個体付近を探索する部分集団は、GA操作を行う個体を選出する際の適合度を単一目的化して部分集団内の個体のみで新たに計算しなおすことで、それぞれの部分集団の探索を効率的に行うことができる。

問題点

重み付き島モデルによる並列 GA では、多目的 GA への応用として探索性能の効率化に重点を置いているため、部分集団への分割方法や適合度割り当てが単純ではない。そのため、少ない Step 数で優良な解を得ることができる代わりに、1Step 毎の計算時間は増加してしまう。結果として GA の終了条件が Step 数で定められている場合、最終ステップまでの計算時間も増加してしまう。このことから、ヒューリスティックスとしての性能を失わない範囲で、可能な限り少ない Step 数で探索を行う必要がある。

今後の展望

本研究では部分集団の数を3つとしたが、探索する非劣個体の数や目的関数空間での探索領域の大小に応じて適切に部分集団の数を選択することで、より細かな探索が可能となる。その際、目的関数による重み付けの異なるそれぞれの部分集団内では、SPEA2 のような Pareto 的アプローチではなく、多目的をそれぞれの目的関数値の重み付けにより単一目的化して最適化を適用する多目的計画法を適用することができる。その際の重み付けは予め部分集団の数に応じて決定しておくことも可能であるが、部分集団内の個体の目的関数値から計算することで、それぞれの部分集団の探索方向をより適切に重み付けに反映することができる。部分集団内の代表2個体の目的関数空間における直線の傾きからの重み付けの計算方法を式(2.7.1)に示す。

$$W_k = - \frac{Objective_k(j,2) - Objective_k(i,2)}{Objective_k(j,1) - Objective_k(i,1)} \quad (2.7.1)$$

ここで、 $Objective_k(i,n)$ とは部分集団 k に属する代表個体 i の目的関数 n の値である。式(2.6.5)により部分集団 k の目的関数1と目的関数2の重み付けの割合は $W_{k:1}$ と決定できる。部分集団内に存在する全ての非劣個体から、最小二乗法などの近似直線により重み付けの割合を決定することも可能であるが、計算が複雑になる点や非劣個体が目的関数空間上で正規分布していない場合に適切に計算できない点で必ずしも有効であるとは言えない。

目的関数空間での重み付けにより単一目的化された部分集団の探索方向の概念図を Fig2.7.7 に示す。

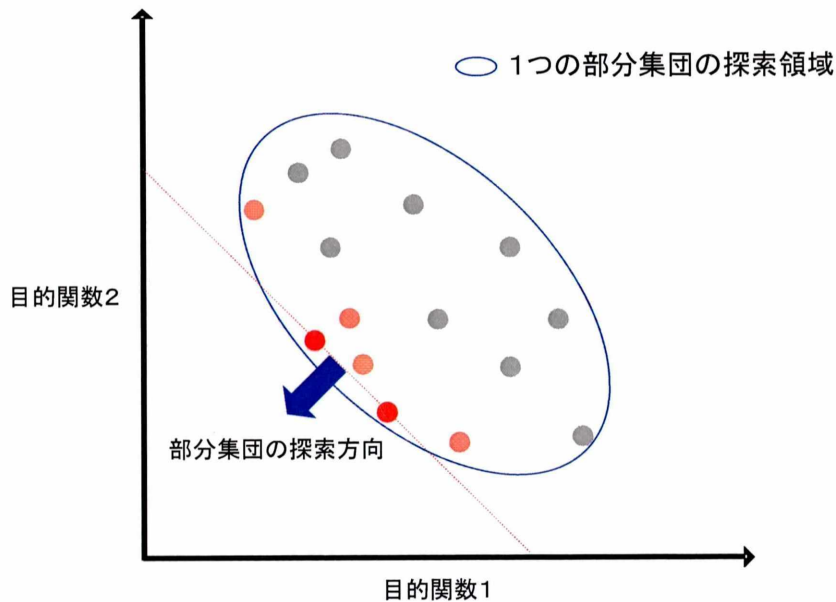


Fig2.7.7 重み付けにより単一目的化した場合の探索方向の概念図

この場合、SPEA2 のように非劣個体全てを解候補とすることはできないが、適合度割当ての計算方法が単純化されるため、計算を高速に行うことができる。また部分集団内では単一目的の適合度割当てを行うため、Pareto 的アプローチによる探索を行った場合には優良解として選出されない個体も探索方向に近い個体ならば優良解として選出することができる。これらにより、部分集団内での探索は SPEA2 を用いた場合より効率的に行うことができると考えられる。また、さらに複数の並列化手法を組み合わせたり、局所探索など他の最適化手法を組み合わせたりするハイブリッド型の並列 GA に関する研究も数多くなされている。GA は交叉によるビルディングブロックの交換を通して、組合せ的に大域的な問題構造を探索する手法であり、局所的な問題構造の探索については、突然変異により部分的に行っているのみである。したがって、SA やタブー探索などの局所探索手法と組み合わせることで、大域的な構造と局所的な構造の両方に対応した最適化を実現することが期待される。部分集団内で局所探索手法と組み合わせたときのハイブリッド型の並列 GA の部分集団内での探索のアルゴリズムを以下に示す。

- ① 部分集団内においてそれぞれの適合度割当てにより優良個体を選出する。
- ② 選出された優良個体を初期値として局所探索を実行する。
- ③ 得られた解を部分集団に戻す。
- ④ 部分集団内で交叉・突然変異などの遺伝的操作を適用する。

現実の問題を解く場合、大域的な問題構造と局所的な問題構造の両方に対応する必要があるため、GA 単独で用いるのではなく解くべき問題に応じて選ばれた局所探索手法と組み合わせることで、効率的な探索を進めることが可能となる。

2.8 結語

本章では、本研究で提案する形状最適化についての理論的準備を行った。

第 2.2 節では、スプライン関数について概説し、それを応用した形状表現手法である NURBS について述べた。

第 2.3 節では、本研究において目的関数とする線形座屈荷重係数が有限要素法における一般固有値問題を解くことにより求められることを示した。

第 2.4 節では、組合せ最適化理論について述べ、本論で用いた GA に関する詳細と、多層型 GA および染色体の重ね合わせによる個体表現と対称条件による遺伝子削除手法について述べた。

第 2.5 節では、単一目的最適化問題を定式化し、第 2.6 節では、多目的最適化問題を定式化し、進化的多目的最適化手法である多目的遺伝的アルゴリズムについて述べた。

第 2.7 節では、並列化によるアルゴリズムの効率化を示し、個体の多様性を維持するためのニッチング手法としての効果を示した。

第3章

遺伝的アルゴリズムを用いた

線形座屈荷重係数の最大化問題

3.1 概説

本章では GA による組合せ最適化手法を用いた線形座屈荷重係数の最適化を行い，構造安定性に優れた形状について検討する。

第 3.2 節では，問題の記述と GA における適合度を定式化する。また，制約条件の扱いについて述べる。

第 3.3 節では，基本解析として部材断面を変数とした線形座屈荷重係数の最大化問題を扱い，本研究の座屈解析プログラムの解の精度を確認する。

第 3.4 節では，節点 Z 座標を変数とした線形座屈荷重係数の最大化問題を取り扱い得られた力学特性について考察する。

第 3.5 節では，部材断面を変数とした線形座屈荷重係数および総重量の最適化問題として多目的問題を扱い，軽量でかつ安定性に優れた構造物の創生を目的とする。

第 3.6 節では，節点 Z 座標を変数とした線形座屈荷重係数および歪エネルギーの最適化問題として第 3.5 節同様に多目的問題を扱い，剛性を高め，なおかつ安定性に優れた構造物の創生を目的とする。

第 3.7 節では，本章の考察を行う。

3.2 線形座屈荷重係数の評価手法

以下に構造物の目的関数最小化問題を次式で示す。

$$\text{Minimize} \quad \text{Object}(x, A) \quad (3.3.3)$$

$$\text{Subject to} \quad g_i \leq 0 \quad (3.3.4)$$

x : 節点配置, A : 部材断面積, g_i : 制約条件

本論では目的関数を曲面の線形座屈荷重係数と構造物総重量および総歪エネルギーの3種に設定し、検討を行っていく。線形座屈荷重係数 μ は以下のようになる。

$$f(x, A) = \frac{1}{\mu} \quad (3.2.1)$$

ここで、目的関数の線形座屈荷重係数 μ は次の一般固有値問題の解である。

$$(K_L + \mu K_G)\phi = 0 \quad (3.2.2)$$

K_L は要素剛性マトリクス, K_G は幾何剛性マトリクス, ϕ は線形座屈モードを表す。

構造総重量 W は次式で表される。

$$W(x, A) = \sum_i^M l_i A_i \rho_i \quad (3.3.5)$$

ここに、 M : 総部材数, l : 各部材の部材長, ρ : 密度を表す。

また、総歪エネルギー U は次式で表わされる。

$$U(\mathbf{r}, A) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T(\mathbf{r}) \mathbf{K}(\mathbf{r}, A) \mathbf{d}(\mathbf{r}) \quad (3.3.6)$$

ここに、 \mathbf{r} : 節点位置ベクトル, \mathbf{d} : 節点変位ベクトル, A : 部材断面性能ベクトル, \mathbf{K} : 全体剛性マトリクスを表す。

GAにおける適合度関数は次式に表される。

$$\text{fitness} = \frac{1}{\text{Object}(x, A)} \prod_i \gamma_i \quad (3.3.7)$$

γ_i はペナルティ関数を表し、 i 番目の制約条件によって課せられる項である。適合度は目的関数の逆数で表わされ、ペナルティ関数の直積によって表現される。

なお本論では制約条件として次式に表現される部材応力, 節点変位及び構造総重量を与える。それぞれの制約条件におけるペナルティ項は以下で示される。

$$\gamma_{\sigma_i} = \begin{cases} 0 & \frac{\sigma_i}{\sigma_{\lim}} > 1 \\ 1 & \frac{\sigma_i}{\sigma_{\lim}} \leq 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, M \quad (3.3.8)$$

$$\gamma_{\delta_j} = \begin{cases} 0 & \frac{\delta_j}{\delta_{\lim}} > 1 \\ 1 & \frac{\delta_j}{\delta_{\lim}} \leq 1 \end{cases} \quad j = 1, \dots, N \quad (3.3.9)$$

$$\gamma_{w_i} = \begin{cases} 0 & \frac{\sum W_i}{W_{\lim}} > 1 \\ 1 & \frac{\sum W_i}{W_{\lim}} \leq 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, M \quad (3.3.10)$$

ここに, γ_{σ_i} : 応力ペナルティ項, γ_{δ_j} : 節点変位ペナルティ項, γ_{w_i} : 重量ペナルティ項, σ_i : i 部材応力, δ_j : j 節点鉛直変位, W_i : i 部材重量, N : 総節点数, M : 総部材数, σ_{\lim} : 応力制限値, δ_{\lim} : 節点変位制限値, W_{\lim} : 総重量制限値を表す。

節点変位制限値と総重量制限値は任意に設定し, 部材応力制限値は許容応力度設計法による式を用いる。 i 部材の最大応力度 $\sigma_{\max i}$ は, その部材に生じている軸方向応力が圧縮の場合, 軸方向応力度 σ_{ci} と曲げモーメントによる応力度 σ_{bi} から次式のように求めることができる。

$$\sigma_{\max i} = \sigma_{ci} + \sigma_{bi} \quad (3.3.11)$$

許容応力度設計法では以下のように部材に発生する応力度の判定を行う。

- ・部材に軸方向の圧縮力と曲げモーメントが生じる場合,

$$\frac{\sigma_c}{f_c} + \frac{\sigma_b}{f_b} \leq 1 \quad (3.3.12)$$

σ_c : 圧縮応力度 σ_b : 圧縮側曲げ応力度 f_c : 許容圧縮応力度 f_b : 許容曲げ応力度

- ・部材に軸方向の引張力と曲げモーメントが生じる場合,

$$\frac{\sigma_t + \sigma_b}{f_t} \leq 1 \quad (3.3.13)$$

σ_t : 引張応力度 σ_b : 引張側曲げ応力度 f_t : 許容引張応力度

許容曲げ応力度 f_b , 許容引張応力度 f_t , 許容圧縮応力度 f_c を以下に示す

$$f_b = f_t = \frac{F}{1.5} \quad (3.3.14)$$

$$f_c = \begin{cases} \frac{1.0 - 0.4 \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^2}{\frac{3}{2} + \frac{2}{3} \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^2} F & \lambda \leq \Lambda \\ \frac{0.277}{\left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^2} F & \lambda > \Lambda \end{cases} \quad (3.3.15)$$

ここに λ, Λ, F はそれぞれ細長比, 限界細長比, 基準強度を表す。

3.3 例題1 部材断面を変数とした線形座屈荷重係数の最大化問題

3.3.1 検討項目

本章では、ラチスシェル構造物の線形座屈荷重係数の最大化問題に対して検討を行う。変数を部材断面とし、隅角部支持モデルに節点毎の支配面積に応じた荷重を作用させた場合の数値解析結果を示す。

3.3.2 解析モデル

本章で扱う解析モデルとして、スパン $20\text{m} \times 20\text{m}$ 、ライズ 10m 、隅角部にピン支持を持つ裁断球殻形状の単層ラチスシェルで覆う場合について考える。グランドストラクチャーを Fig3.3.1 に示す。なお、部材の接合はスパンを 8 分割した点を節点として節点で剛接合とし、図中にて節点以外で交差して見える部材は接合されていないものとした。使用部材は 4 種類の円形鋼管とした。

また、本論では線形座屈荷重係数を目的関数とし、同時に解の 1 次座屈モードを求めている。座屈モードが全体系で現れることを考慮し、3 次元有限要素解析および線形座屈解析は 1/4 解析モデルとせずフルモデル解析領域で行うものとする。なお、GA 操作の点については第 2 章で述べたように断面の解析領域は 1/4 解析モデルとし、シェルの対称性を考慮して解析を行う。

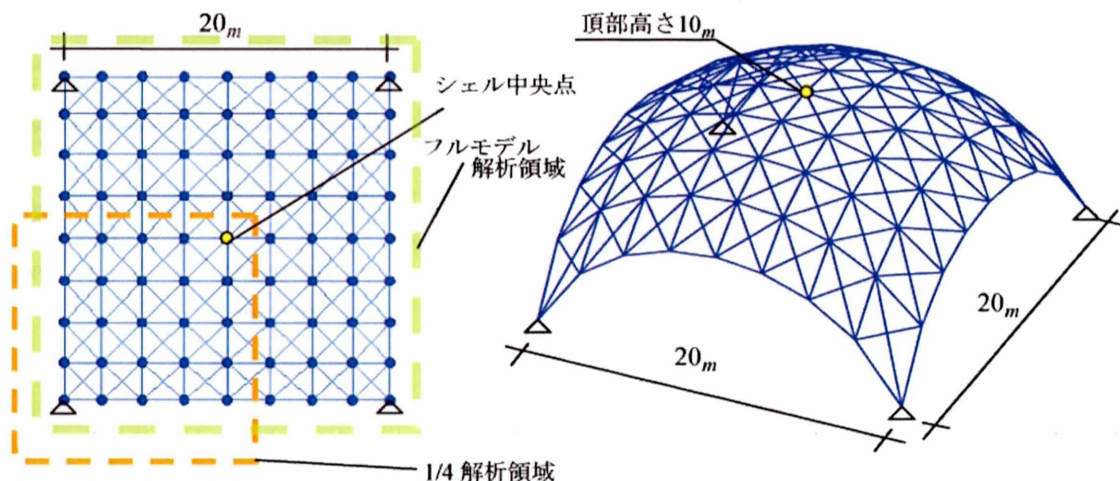


Fig3.3.1 グランドストラクチャー

3.3.3 解析条件

荷重条件は、モデルの各節点毎の支配面積に応じた荷重を作用させたものとした。荷重の大きさは実設計に応じて、一般の屋根の長期荷重 1.5kN/m^2 (約 150kg/m^2) とした。解析モデルに節点の支配面積に応じた荷重の作用のさせ方を Fig3.3.2 に示す。

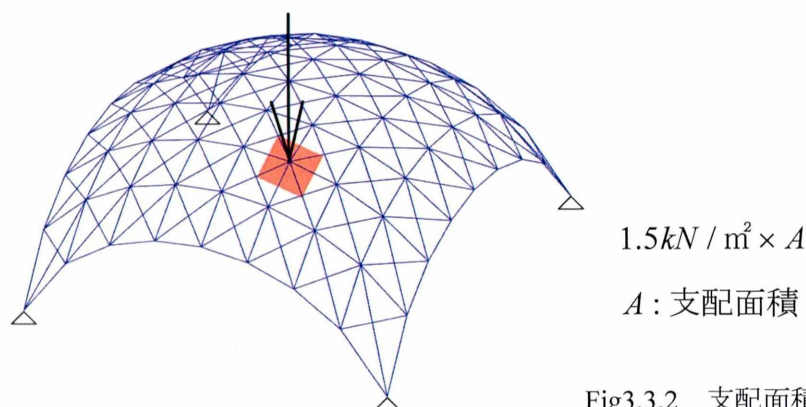


Fig3.3.2 支配面積に応じた荷重

解析条件は、Table 3.3.1 を用いる。部材は4種類の鋼材から選択し、鋼材は SN400 の円形鋼管とする。断面性能を Table 3.3.3 に示す。本検討の制約条件は、許容応力度の制限を満たすものとする。許容応力度の制限は、部材の応力と許容応力度との割合を 100% までとする。また step0 の初期形態を、Table 3.3.3 の鋼材 No.4 のみを選択したモデルに設定した。

GA の操作は、各変数に対して Elite 個体選択を De Jong¹⁸⁾ の定義に従う手法を採用し、選択淘汰(再生)をトーナメント戦略とした。交叉、突然変異では、乱数による2点交叉、多点突然変異を用いた。GA のパラメーターは Table 3.3.2 に示す。

Table 3.3.1 解析概要

形状条件	正方形平面：20m×20m ライズ：10m 隅各部ピン支持裁断球殻シェル
接合条件	剛接合
変域	使用鋼材4種類
制約条件	・使用鋼材許容応力度 100%，総自重 ($W \leq 15,000 \text{ kg}$)
鋼材定数	$E=2.05 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\nu=0.3$, $G=0.794 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ E:ヤング係数, ν :ポアソン比, G:せん断弾性係数

Table 3.3.2 GA パラメーター

母集団個体数	300
エリート個体数	30
交叉率	50%~70%
突然変異率	0.5%~5%
世代数	3000
個体遺伝子長	80bit

Table 3.3.3 断面性能

No.	ϕ (mm)	t (mm)	W_0 (kg/m)	A (cm^2)	I (cm^4)	Z (cm^3)	i (cm)
1	60.5	4.0	5.57	7.100	28.5	9.41	2.00
2	101.6	5.0	11.9	15.17	177	34.9	3.42
3	139.8	6.0	19.8	25.22	566	80.9	4.74
4	190.7	7.0	31.7	40.40	1710	179	6.50

3.3.4 解析結果

前節の解析条件を元に、隅角部ピン支持モデルの線形座屈荷重係数最大化問題の検討を行う。

■結果と考察

例題1の世代1, 世代705および最適解の解析結果をTable3.3.4に示す。なお, 世代705を示す理由は, それ以前の解析世代で制約条件を満たさない解となっているためである。また, 解析時間は3000世代までに要した時間である。そして, 線形座屈荷重係数, 全部材の平均応力度, 節点変位の推移をそれぞれFig3.3.3, Fig3.3.4, Fig3.3.5にグラフとして示す。また, 代表的な各ステップの最適個体の形状の進化, 応力度分布, 節点変位と許容応力度に対する割合の分布をFig3.3.6, Fig3.3.7, Fig3.3.8に示す。本題では, 944世代で最適解に収束した。Table3.3.4およびFig3.3.3, Fig3.3.5より, 線形座屈荷重係数が2倍以上増加していることと, それに伴い平均節点変位も減少できていることがわかる。Fig3.3.4から線形座屈荷重係数の増加と共に応力度も減少しているのが読み取れる。総自重量に関しては, 部材のばらつきを抑え, 徐々に自由端部に断面の大きな部材を選択し, 部材の中央では断面の小さな部材を選択しており, 効率的な部材配置へと進化している(Fig3.3.6)。また, シェル支持部と自由端部では, 発生する曲げ応力に抵抗するため使用鋼材の許容応力度に対する割合は70%を超え最大で93%にまで達しているのがわかる(Fig3.3.7, Fig3.3.8)。

Table3.3.4 世代1および 世代705 と最適解の解析結果

	世代1	世代705	最適解 (世代944)
線形座屈荷重係数	4.47	6.77	14.09
許容応力度に 対する割合(%)	186	100	93
総自重量(kg)	17,785	14,896	14,991
解析時間	98h 31m 23s		

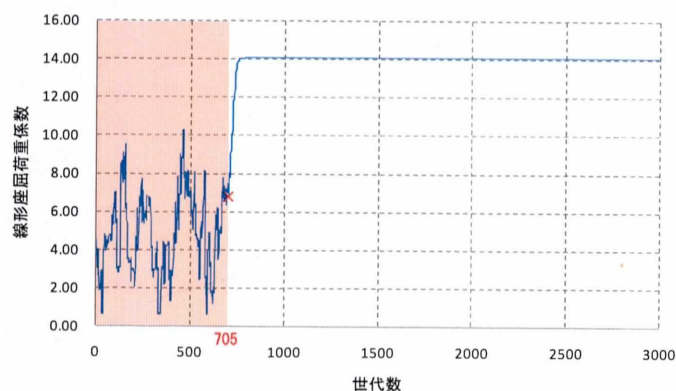


Fig3.3.3 線形座屈荷重係数の推移

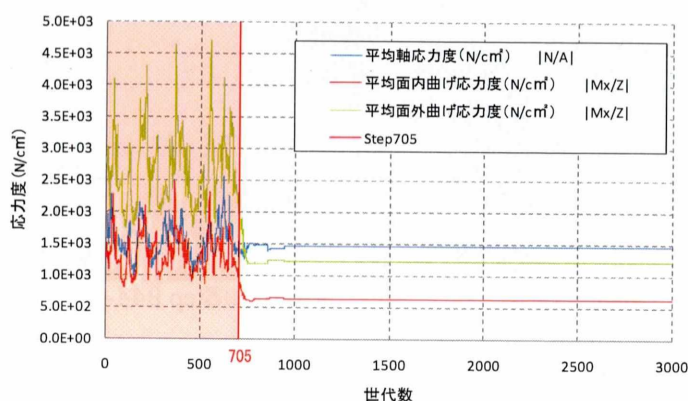


Fig3.3.4 平均応力度の推移

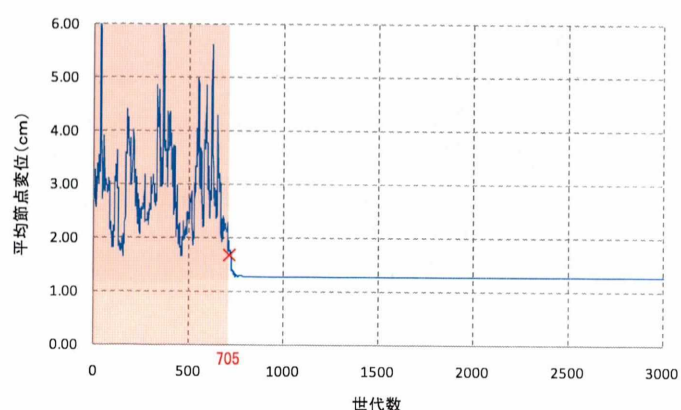


Fig3.3.5 平均節点変位の推移

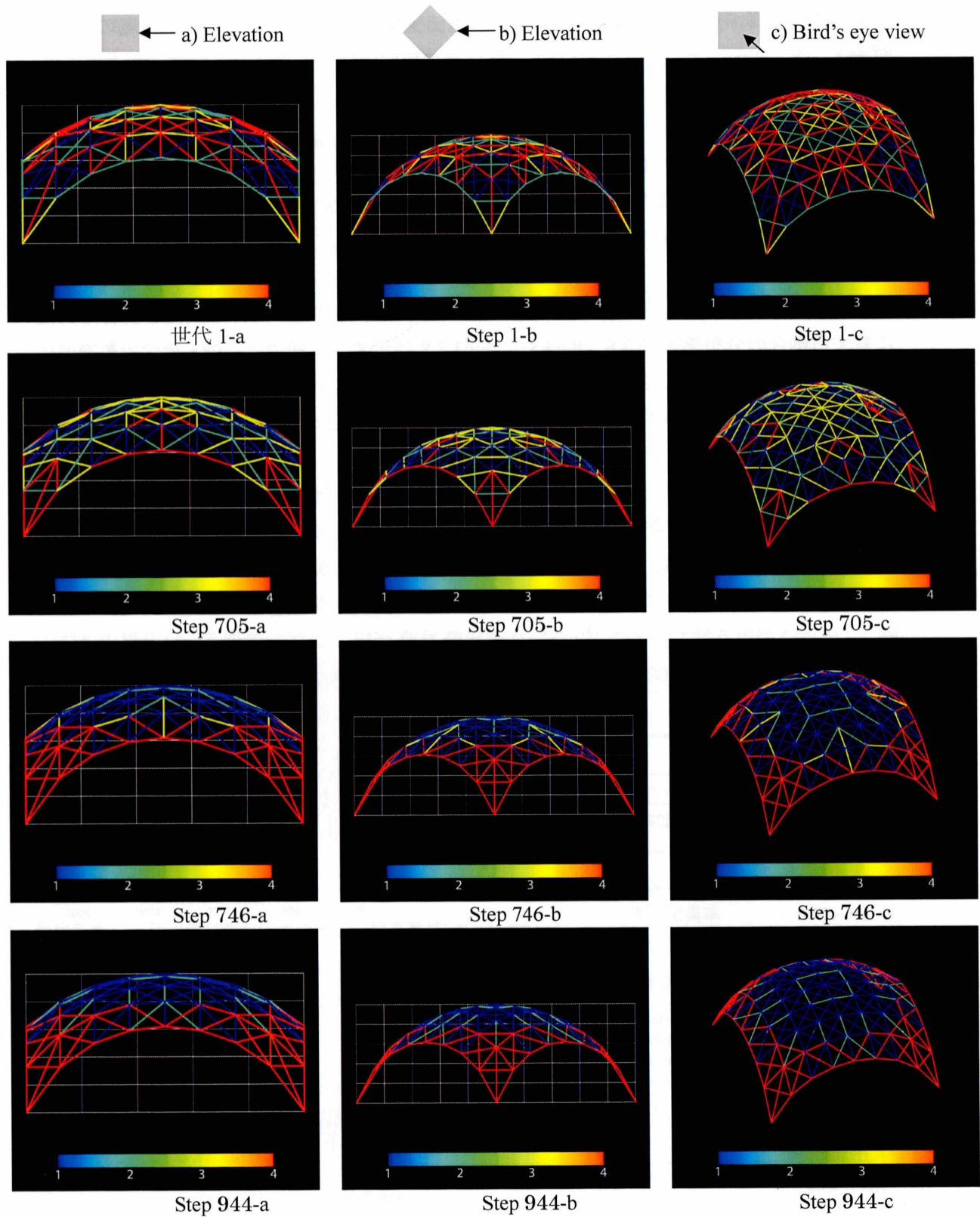


Fig3.3.6 部材断面の進化（部材の色は鋼材 No を表す）

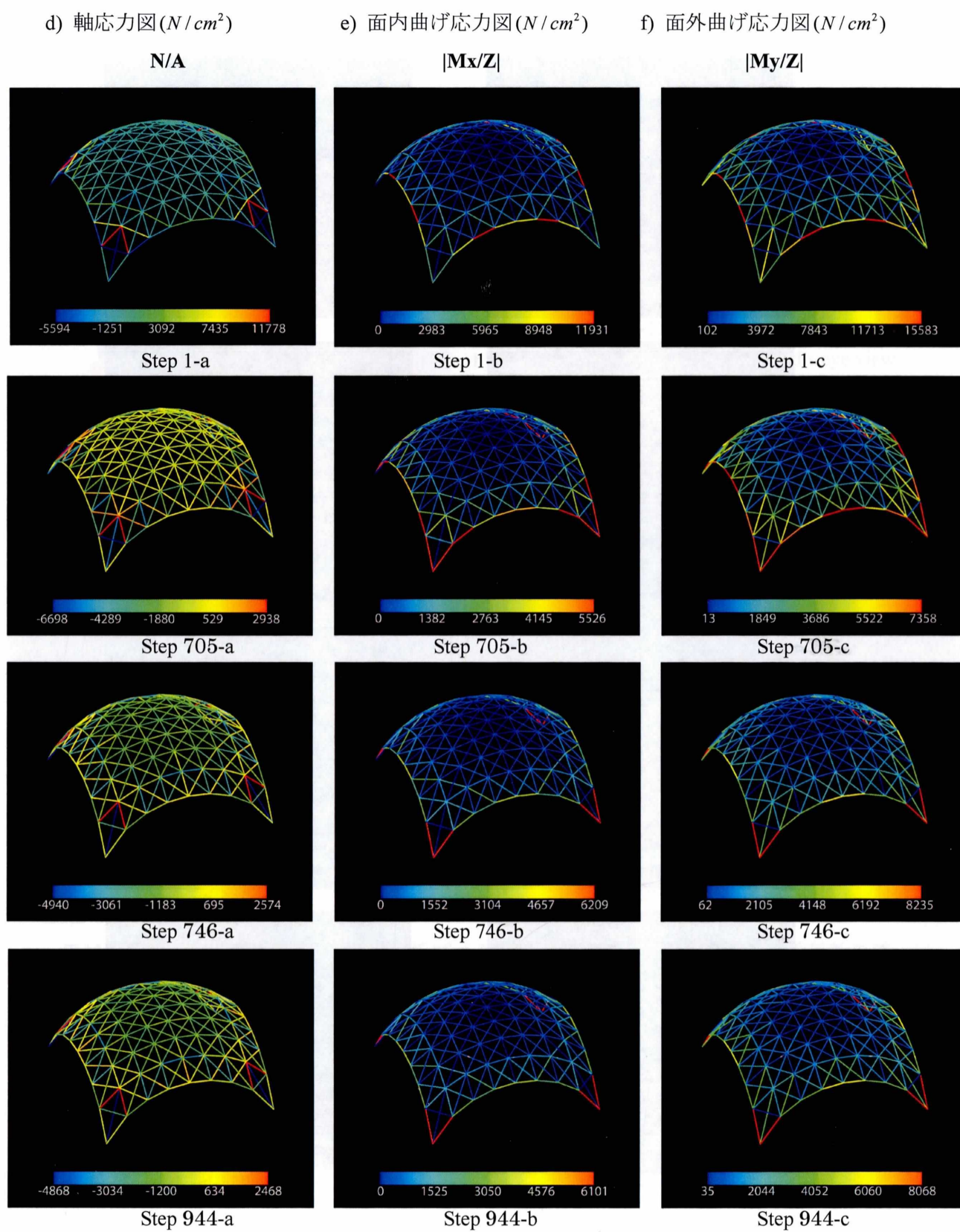


Fig3.3.7 応力度分布進化

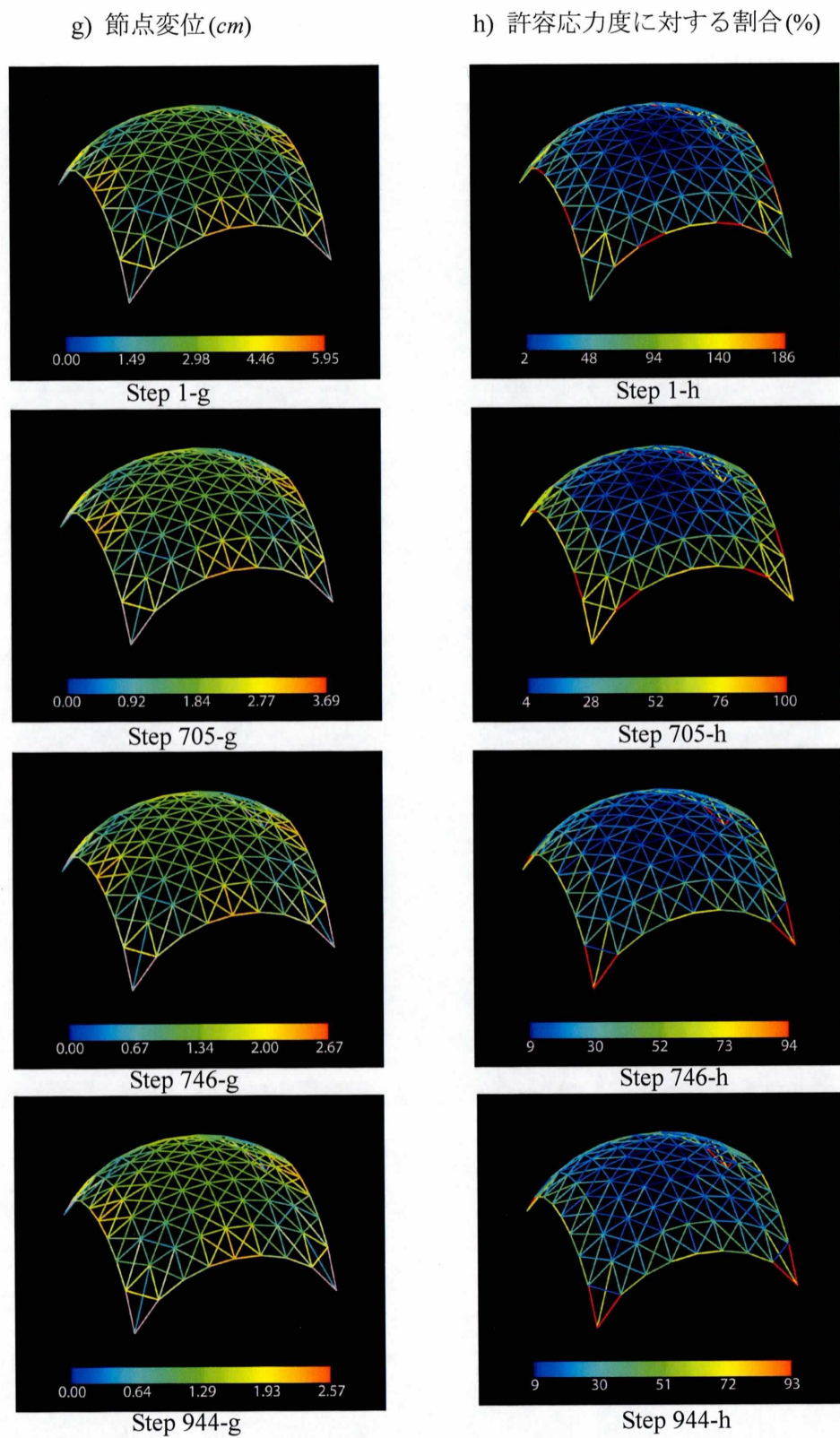


Fig3.3.8 節点変位と許容応力度に対する割合

3.3.5 考察

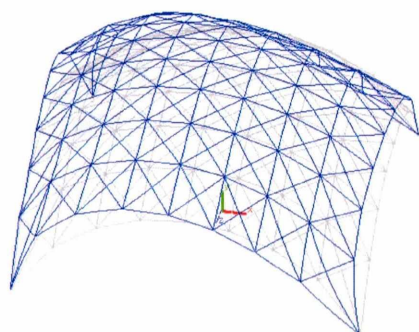


Table3.3.5 線形座屈荷重係数の比較

汎用構造解析ソフトウェア Multiframe	13.82
GA 解析プログラム	14.09

Fig3.3.9 1次座屈モード (Multiframe)

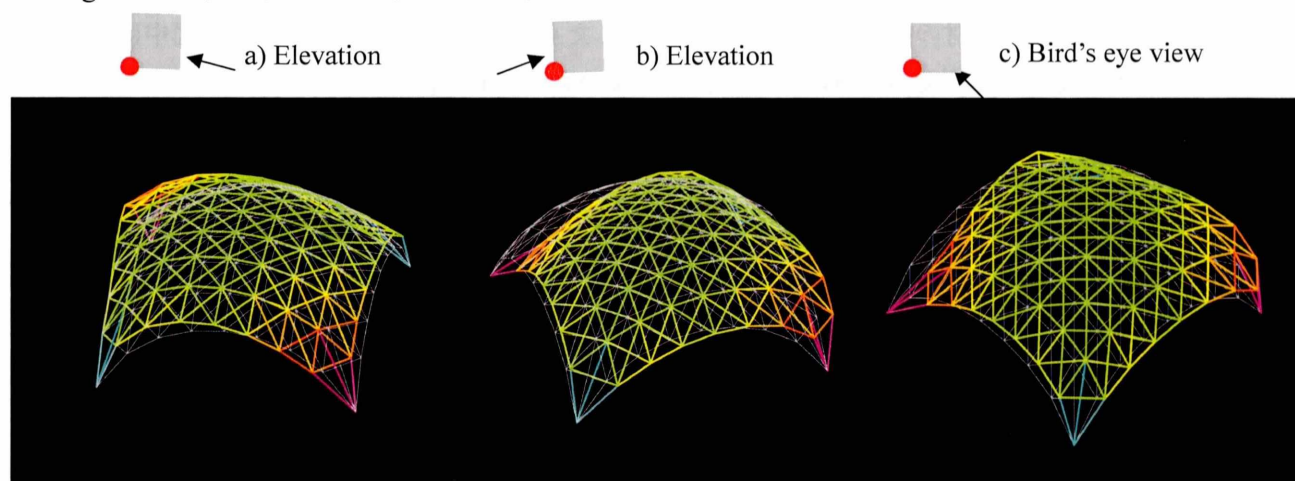


Fig3.3.10 1次座屈モード (GA 解析プログラム)

本章では単層ラチスシェルの部材断面を変数とした構造形態修正による線形座屈荷重係数最大化問題を扱った。本研究で用いた GA 解析プログラムより得られた最適解と汎用構造解析ソフトウェア Multiframe により得られた解を比較するため Table3.3.5 に線形座屈荷重係数の値を、Fig3.3.9 および Fig3.3.10 にそれぞれ Multiframe と GA 解析プログラムの 1 次座屈モードを示す。

Table3.3.5 より、本研究で使用した解析プログラムにより得られた線形座屈荷重係数の値と Multiframe により得られたその値を比較すると、およそ 2% 程度の誤差は見られるが良好に解が得られているといえる。また、座屈モードにおいても非常に酷似しており、本研究で使用した解析プログラムの有用性が確認できる (Fig3.3.9, Fig3.3.10)。

なお、本研究で使用した裁断球殻シェルのライズは偏平なものと比較して高く設定されていることから、水平方向に倒れるように座屈モードが現れたと考えられる。

3.4 例題2 節点Z座標を変数とした線形座屈荷重係数の最大化問題

3.4.1 検討項目

本章では, 引き続きラチスシェル構造物の線形座屈荷重係数の最大化問題に対して検討を行う。変数を節点Z座標とし, 隅角部支持モデルに節点毎の支配面積に応じた荷重を作用させた場合の数値解析結果を示す。

3.4.2 解析モデル

本節で扱う解析モデルとして, スパン $20\text{m} \times 20\text{m}$, 正方形平面, 隅角部にピン支持を持つ形状の単層ラチスシェルで覆う場合について考える。グランドストラクチャーを Fig.3.4.1 に示す。なお, 部材の接合はスパンを8分割した点を節点として剛接合とし, 図中にて節点以外で交差して見える部材は接合されていないものとした。

節点Z座標の変域は支持点を除く全節点で, 初期Z座標を 0m として, $0\text{m} \leq Z \leq 10\text{m}$ とした。そして, 節点Z座標は離散数として用いているため, 分割点を16個とし 10m を15分割した 66.7cm が節点座標修正の最小単位となっている。また, 使用部材はSN400の円形鋼管とした。

本論では線形座屈荷重係数を目的関数とし, 同時に解の1次座屈モードを求めている。座屈モードが全体系で現れることを考慮し, 3次元有限要素解析および線形座屈解析は1/4解析モデルとせずフルモデル解析領域で行うものとする。なお, GA操作の点については第2章で述べたように節点Z座標の解析領域は1/4解析モデルとし, シェルの対称性を考慮して解析を行う。さらに節点Z座標の場合, NURBSを使用して制御点を減らして解析を行う。

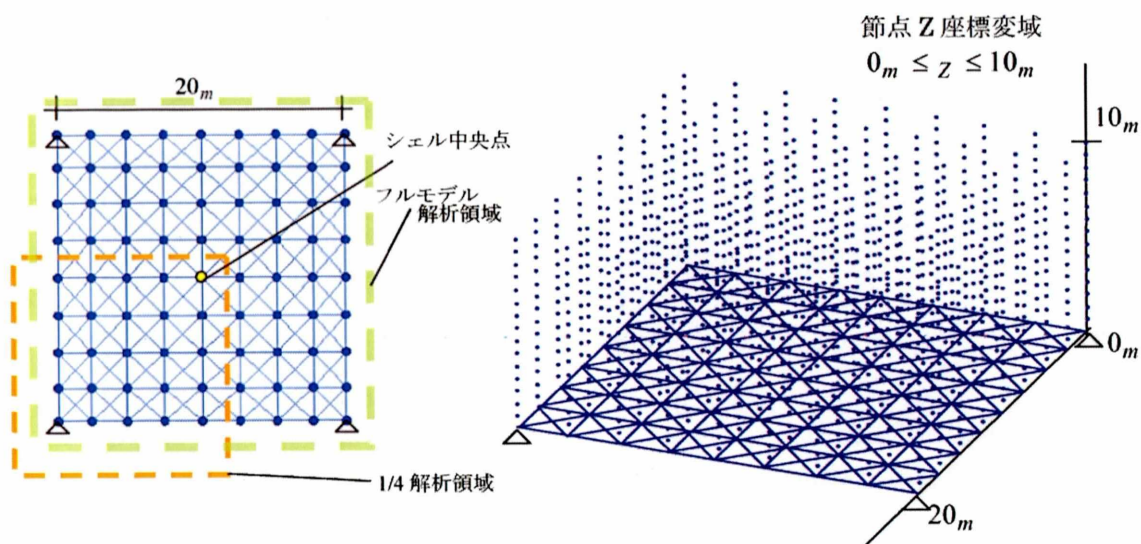


Fig3.4.1 グランドストラクチャー

3.4.3 解析条件

荷重条件は、例題 1 同様にモデルの各節点毎の支配面積に応じた荷重を作用させたものとした。荷重の大きさは実設計に応じて、一般の屋根の長期荷重 1.5kN/m^2 (約 150kg/m^2) とした。解析モデルに節点の支配面積に応じた荷重の作用のさせ方を Fig3.4.2 に示す。

なお、今後続く例題 3 および例題 4 も同様の荷重条件とする。

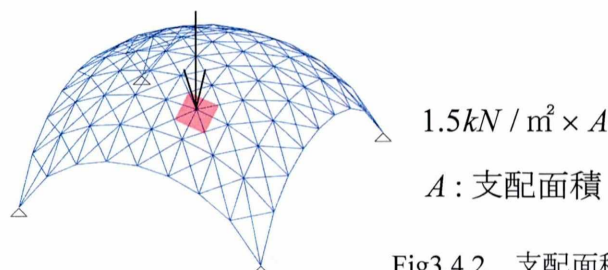


Fig3.4.2 支配面積に応じた荷重

解析条件は、Table3.4.1 を用いる。部材は 4 種類の鋼材から選択し、鋼材は SN400 の円形鋼管とする。断面性能を Table3.4.3 に示す。本検討の制約条件は、許容応力度の制限を満たすものとする。許容応力度の制限は、部材の応力と許容応力度との割合を 100%までとする。

また、本論にて用いる円形鋼管は SN400 鋼管とし、Table 3.4.3 に示す鋼材 No.2 のみを選択したモデルに設定した。

GA の操作は、各変数に対して Elite 個体選択を De Jong¹⁸⁾ の定義に従う手法を採用し、選択淘汰(再生)をトーナメント戦略とした。交叉、突然変異では、乱数による 2 点交叉、多点突然変異を用いた。GA のパラメーターは Table3.4.2 に示す。

Table 3.4.1 解析概要

形状条件	正方形平面：20m×20m ライズ：10m 隅各部ピン支持
接合条件	剛接合
変域	$0\text{m} \leq Z \leq 10\text{m}$
制約条件	・使用鋼材許容応力度 100%
鋼材定数	$E=2.05 \times 10^5 \text{N/mm}^2$, $\nu=0.3$, $G=7.94 \times 10^5 \text{N/mm}^2$

E:ヤング係数, ν :ポアソン比, G:せん断弾性係数

Table 3.4.2 GA パラメーター

母集団個体数	270
エリート個体数	27
交叉率	50%~70%
突然変異率	0.5%~5%
世代数	1000
個体遺伝子長	36bit

Table 3.4.3 断面性能

No.	ϕ (mm)	t (mm)	W_0 (kg/m)	A (cm^2)	I (cm^4)	Z (cm^3)	i (cm)
1	60.5	4.0	5.57	7.100	28.5	9.41	2.00
▶ 2	101.6	5.0	11.9	15.17	177	34.9	3.42
3	139.8	6.0	19.8	25.22	566	80.9	4.74
4	190.7	7.0	31.7	40.40	1710	179	6.50

3.4.4 解析結果および考察

前節の解析条件を元に、隅角部ピン支持モデルの線形座屈荷重係数最大化問題の検討を行う。

例題2の世代1と最適解の解析結果をTable3.4.4に示す。また、解析時間は1000世代までに要した時間である。そして線形座屈荷重係数、全部材の平均応力度、平均節点変位の推移をそれぞれFig3.4.3, Fig3.4.4, Fig3.4.5にグラフとして示す。また、代表的な各ステップの最適個体の形状の進化、応力度分布、節点変位と許容応力度に対する割合の分布、1次座屈モードをそれぞれFig3.4.6, Fig3.4.7, Fig3.4.8, Fig3.4.9に示す。本題では、世代49で最適解に収束した。Fig3.4.3, Fig3.4.4, Fig3.4.5から線形座屈荷重係数の増加と共に応力度、変位が減少しているのが読み取れる。形状は、Fig3.4.6からStep1ではシェル自由端部を上昇させることでシェル対角線上に谷を形成し剛性を高めようとしているが、自由端部が上昇し過ぎていたために大きな曲げ応力が発生してしまっている(Fig3.4.7_Step1-e)。その後、世代18, 36, 49では自由端部が中心で折れ曲がり、全体的に折れ曲がったような形状が確認できる。これは折板構造のように形状修正することで、荷重に対して座屈することを防いでいると推察できる。また、全体としてシェルのライズを低く保つことにより、構造体としての安定性を確保していると考えられる。Fig3.4.9の座屈モードを見ると、例題1の場合とは異なり、水平方向へ倒れるというよりは、ライズが低くなっているため鉛直方向の荷重に対して支持部が同じ割合で潰されるように崩壊しているように見える。なお、世代49-iで支持部の崩壊が一カ所卓越している点については、数値計算過程での誤差であり、本来ならば世代18-iや世代36-iと似たようなモードが現れるはずである。

Table3.4.4 Step 世代1と最適解の解析結果

	世代1	最適解(世代49)
線形座屈荷重係数	6.38	8.08
総歪エネルギー(N・cm)	3.151×10^5	2.167×10^5
許容応力度に対する割合(%)	100	84
総自重(kg)	11,479	10,519
解析時間	14h 13m 35s	

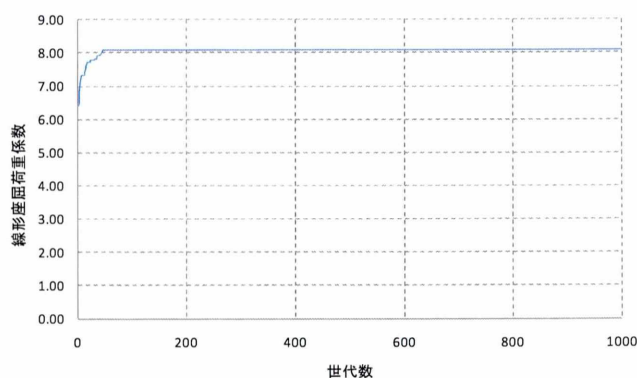


Fig3.4.3 線形座屈荷重係数の推移

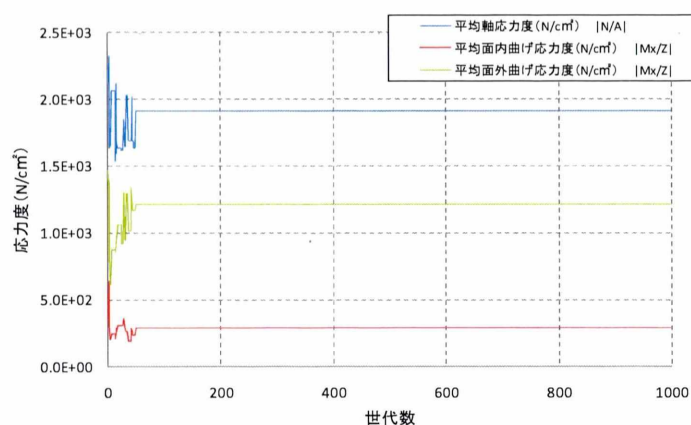


Fig3.4.4 平均応力度の推移

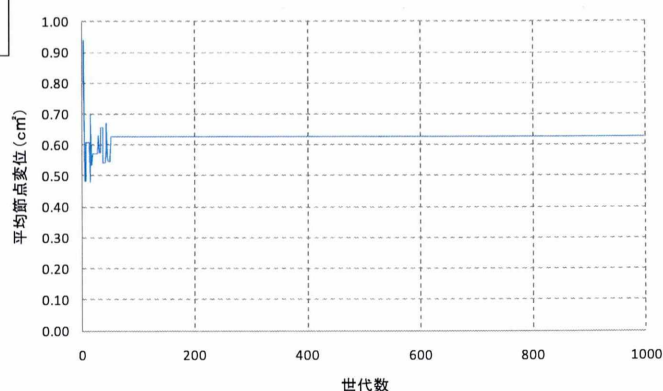


Fig3.4.5 平均節点変位の推移

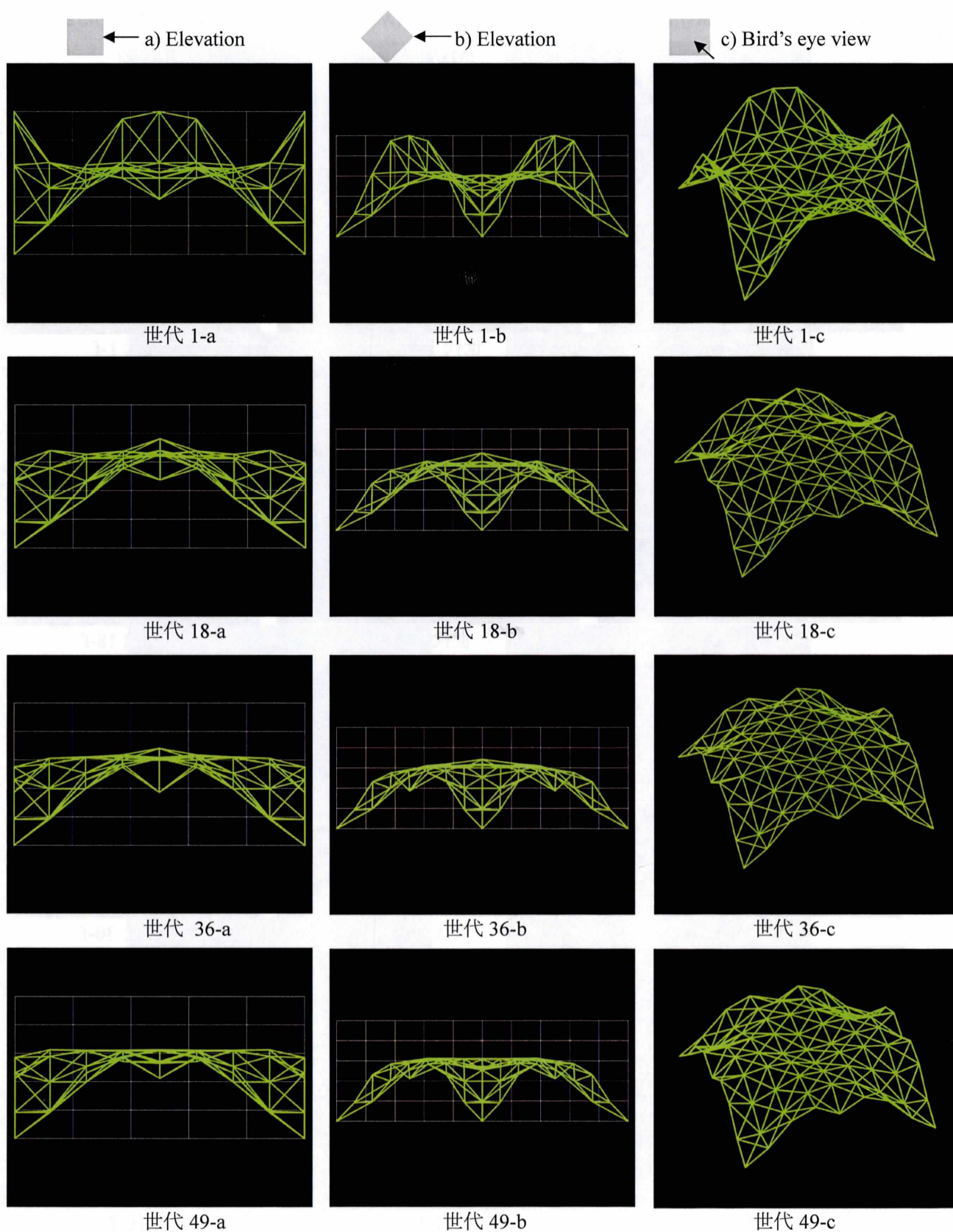


Fig3.4.6 形状の進化

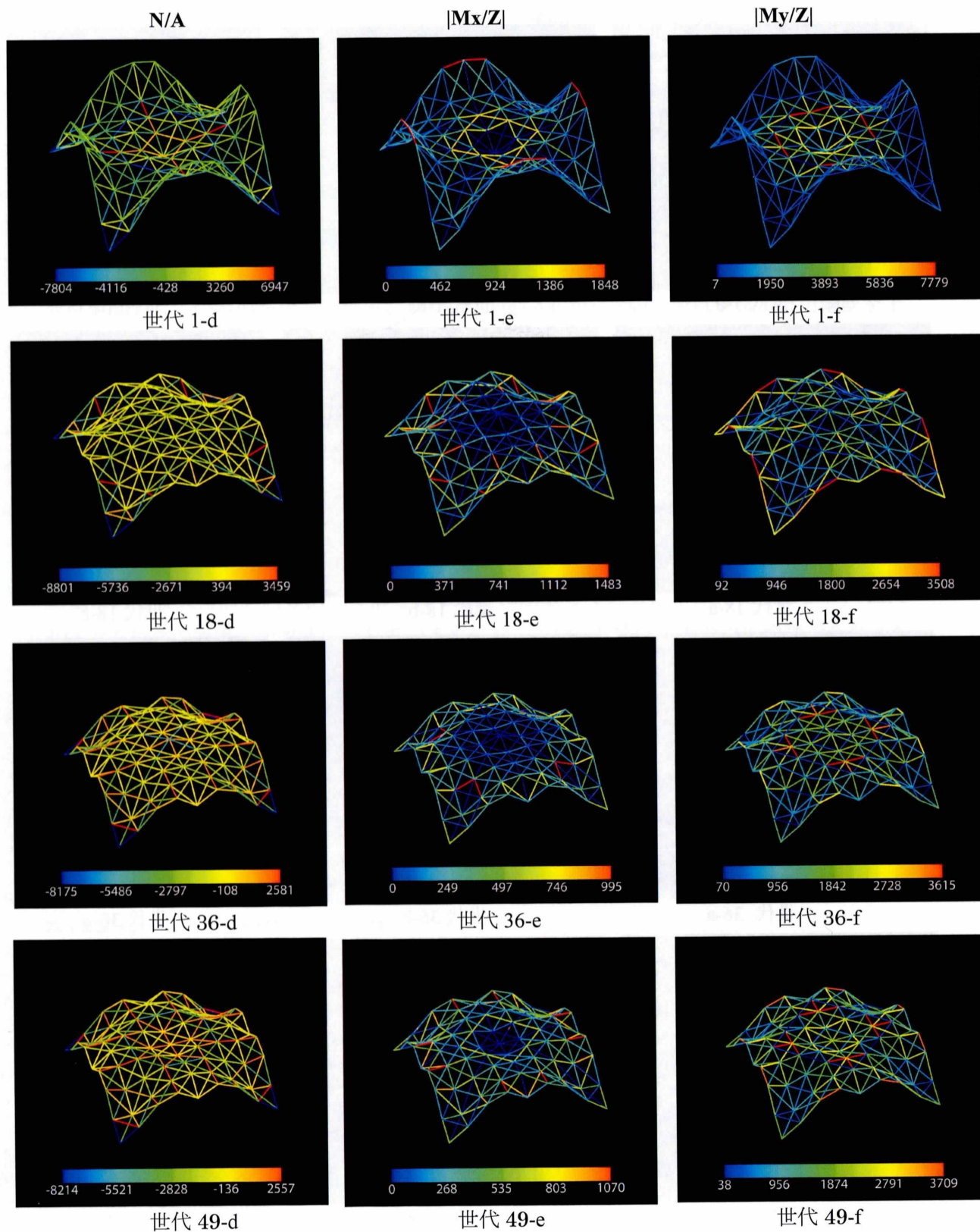
d) 軸応力図(N/cm^2)e) 面内曲げ応力図(N/cm^2)f) 面外曲げ応力図(N/cm^2)

Fig3.4.7 応力度分布進化

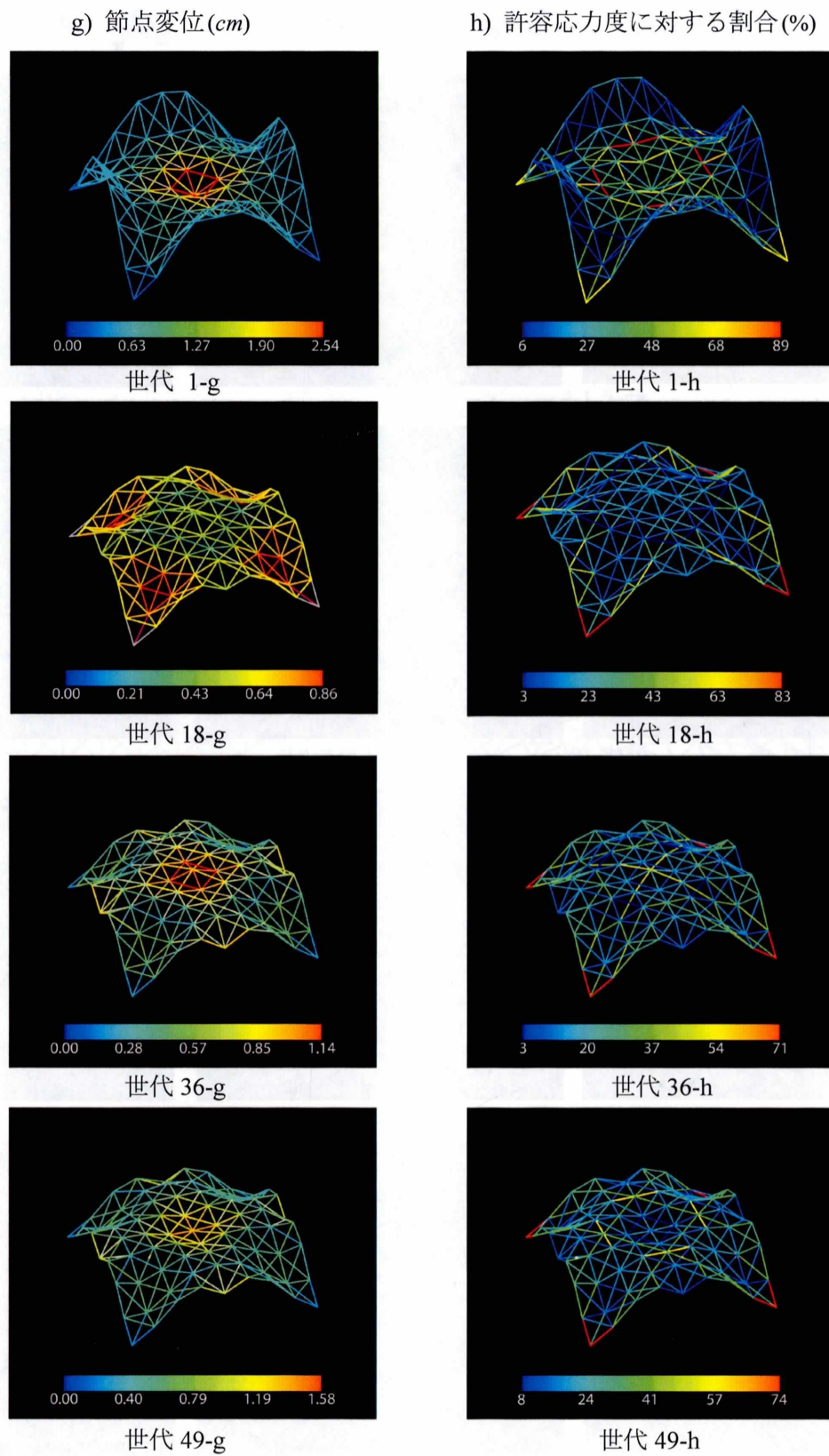


Fig3.4.8 節点変位と許容応力度に対する割合

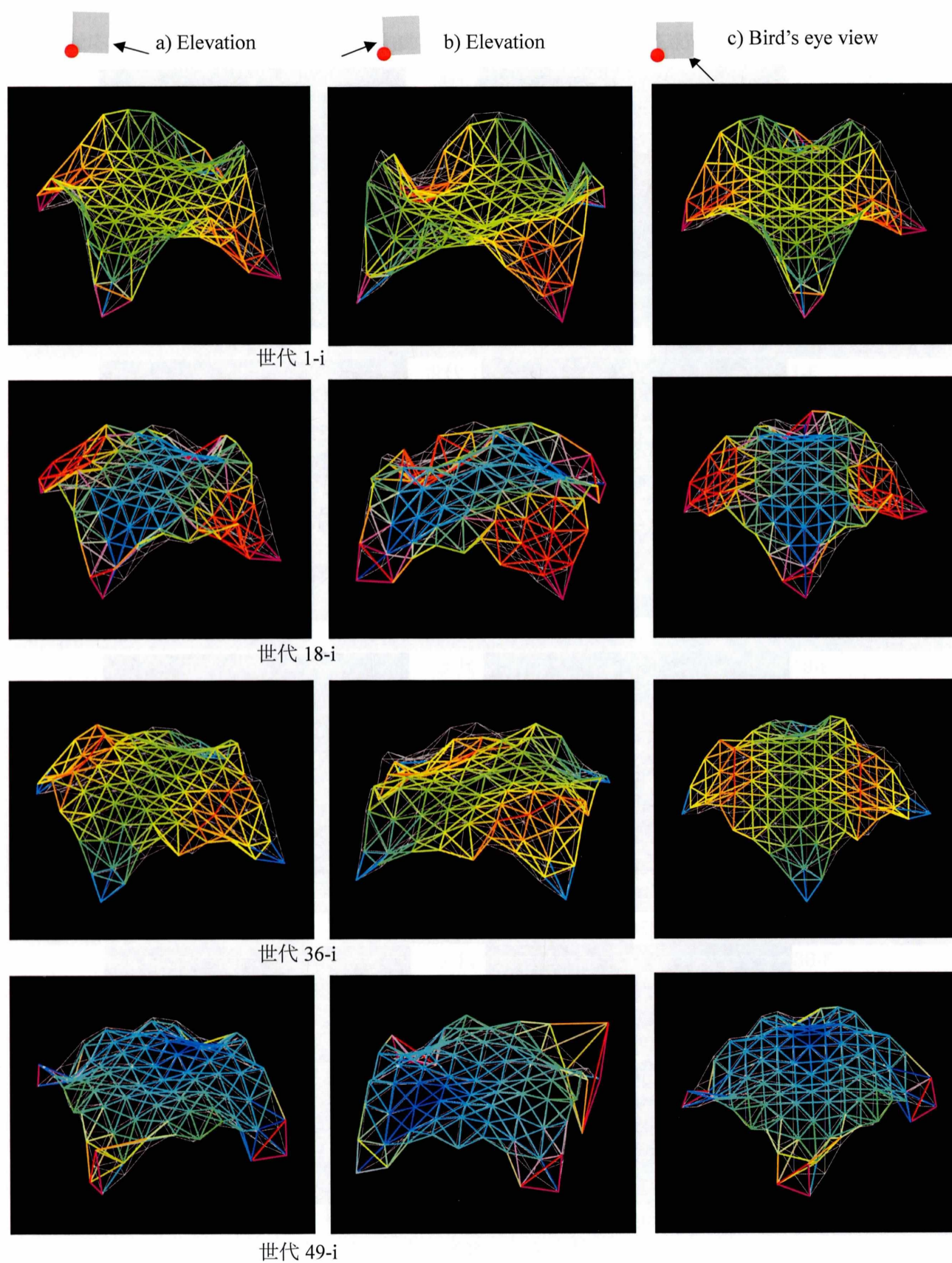


Fig3.4.9 1次座屈モード

3.5 例題3 断面を変数とした線形座屈荷重係数および総重量の最適化問題

3.5.1 検討項目

本節では、軽量でかつ構造安定性を備えた部材配置の構造物を得るため、部材断面を変数とした線形座屈荷重係数最大化および総自重最小化問題に対して解析を行う。また、得られた近似 Pareto 最適フロントの個体を比較検討する。変数を部材断面とし、荷重条件は例題1および例題2同様に隅角部支持モデルに節点毎の支配面積に応じた荷重を作用させた場合の数値解析結果を示す。本解析では形状を裁断球殻とした。

3.5.2 解析モデル

本節で扱う解析モデルとして、スパン $20\text{m} \times 20\text{m}$ 、正方形平面、隅角部にピン支持を持つ裁断球殻形状の単層ラチスシェルで覆う場合について考える。グランドストラクチャーを Fig3.5.1 に示す。なお、部材の接合はスパンを8分割した点を節点として剛接合とし、図中にて節点以外で交差して見える部材は接合されていないものとした。使用部材は SN400 の円形鋼管とした

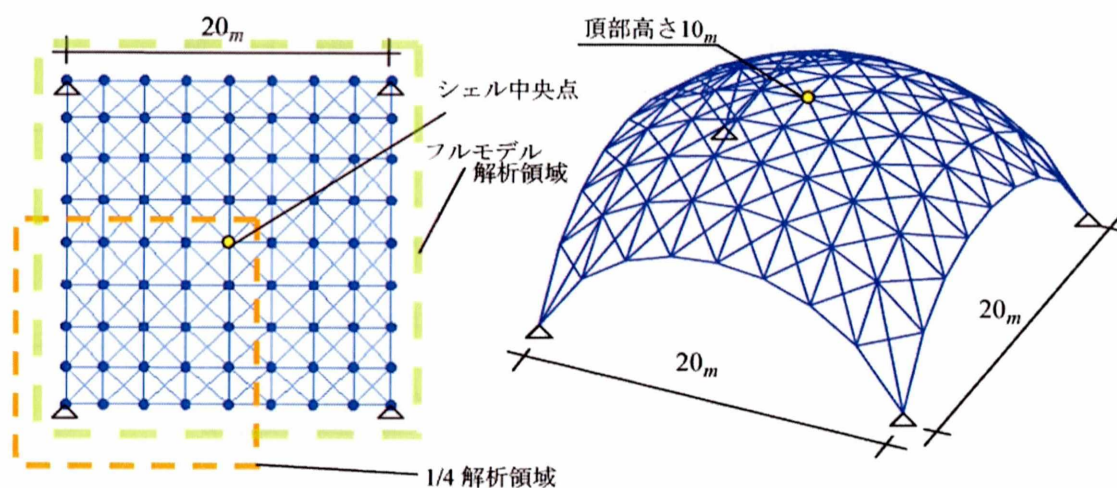


Fig3.5.1 グランドストラクチャー

また、例題2同様に本論では線形座屈荷重係数を目的関数とし、同時に解の1次座屈モードを求めている。座屈モードが全体系で現れることを考慮し、3次元有限要素解析および線形座屈解析は1/4解析モデルとせずフルモデル解析領域で行うものとする。なお、GA操作の点については第2章で述べたように断面の解析領域は1/4解析モデルとし、シェルの対称性を考慮して解析を行う。

3.5.3 解析条件

荷重条件は、例題 1, 2 同様にモデルの各節点毎の支配面積に応じた荷重を作用させたものとした。荷重の大きさは実設計に応じて、一般の屋根の長期荷重 1.5kN/m^2 (約 150kg/m^2) とした。

解析条件は Table 3.5.1 を用いる。本検討の使用鋼材は 4 種類の円形鋼管から選択する。使用鋼材の断面性能を Table 3.5.3 に示す。本検討の制約条件は各部材の許容応力度の制限を満たすものとした。

GA の操作(交叉と突然変異)では、乱数による一様交叉と多点突然変異を用いた。GA のパラメーターを Table 3.5.2 に示す。

Table 3.5.1 解析概要

形状条件	裁断球殻：20m×20m ライズ：10m 隅各部ピン支持
接合条件	剛接合
変域	使用鋼材 4 種類
制約条件	・ 使用鋼材の許容応力度 100% ・ 総自重 ($W \leq 20,000 \text{ kg}$)
鋼材定数	$E=2.05 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\nu=0.3$, $G=7.94 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

E:ヤング係数, ν :ポアソン比, G:せん断弾性係数

Table 3.5.2 GA パラメーター

母集団個体数	270
エリート個体数	27
交叉率	50%~70%
突然変異率	0.5%~5%
世代数	3000
個体遺伝子長	80bit

Table 3.5.3 断面性能

No.	ϕ (mm)	t (mm)	W_0 (kg/m)	A (cm^2)	I (cm^4)	Z (cm^3)	i (cm)
1	60.5	4.0	5.57	7.100	28.5	9.41	2.00
2	101.6	5.0	11.9	15.17	177	34.9	3.42
3	139.8	6.0	19.8	25.22	566	80.9	4.74
4	190.7	7.0	31.7	40.40	1710	179	6.50

以上の解析条件を元に、ラチスシェルの線形座屈荷重係数の最大化および総自重の最小化問題の検討を行う。

3.5.4 解析結果および考察

目的関数空間における最終世代に得られた近似 Pareto 最適フロントを Fig.3.5.2 に示し、初期個体と近似 Pareto 最適フロントの代表的な個体の解析結果を Table.3.5.4 に示す。また、解析時間は 3000 世代までに要した時間である。そして、世代毎の目的関数値優良個体の線形座屈荷重係数および総自重量の推移をそれぞれ Fig.3.5.3 にグラフとして示す。また、代表的な個体の部材断面、応力度分布、節点変位と許容応力度に対する割合の分布、1 次座屈モードを Fig.3.5.4, Fig.3.5.5, Fig.3.5.6, Fig.3.5.7 に示す。

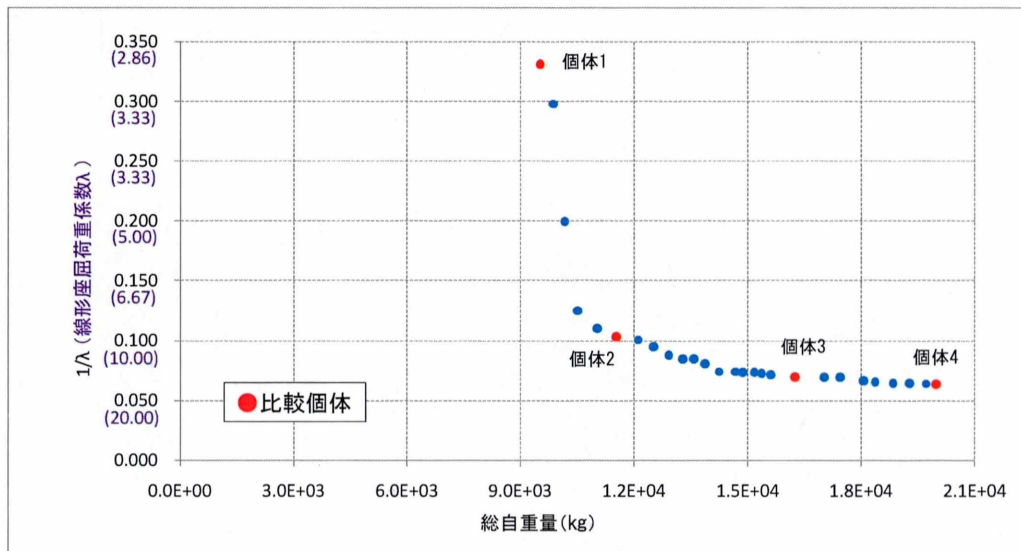


Fig.3.5.2 近似 Pareto 最適フロント

Table.3.5.4 初期個体と比較個体の解析結果

	個体 1 (総自重量最小)	個体 2	個体 3	個体 4 (座屈荷重係数最大)
線形座屈荷重係数	3.02	9.71	14.35	15.82
総自重量(kg)	9,527	11,539	16,247	19,985
解析時間	38h 13m 45s			

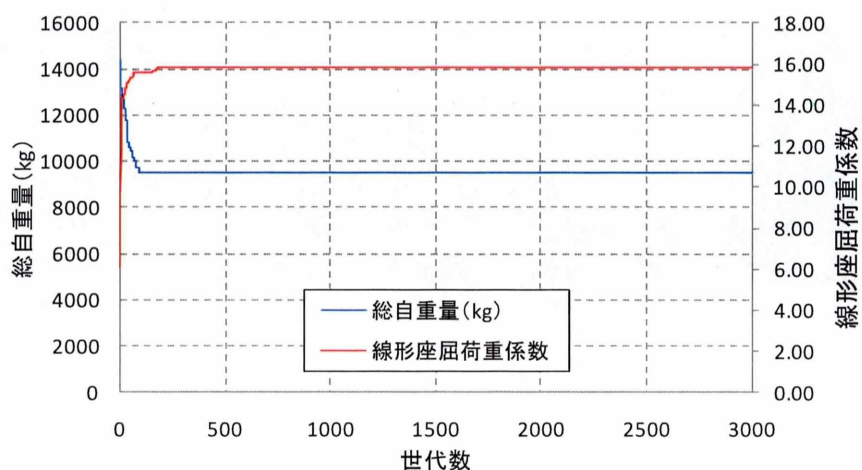


Fig3.5.3 総自重量および線形座屈荷重係数の推移

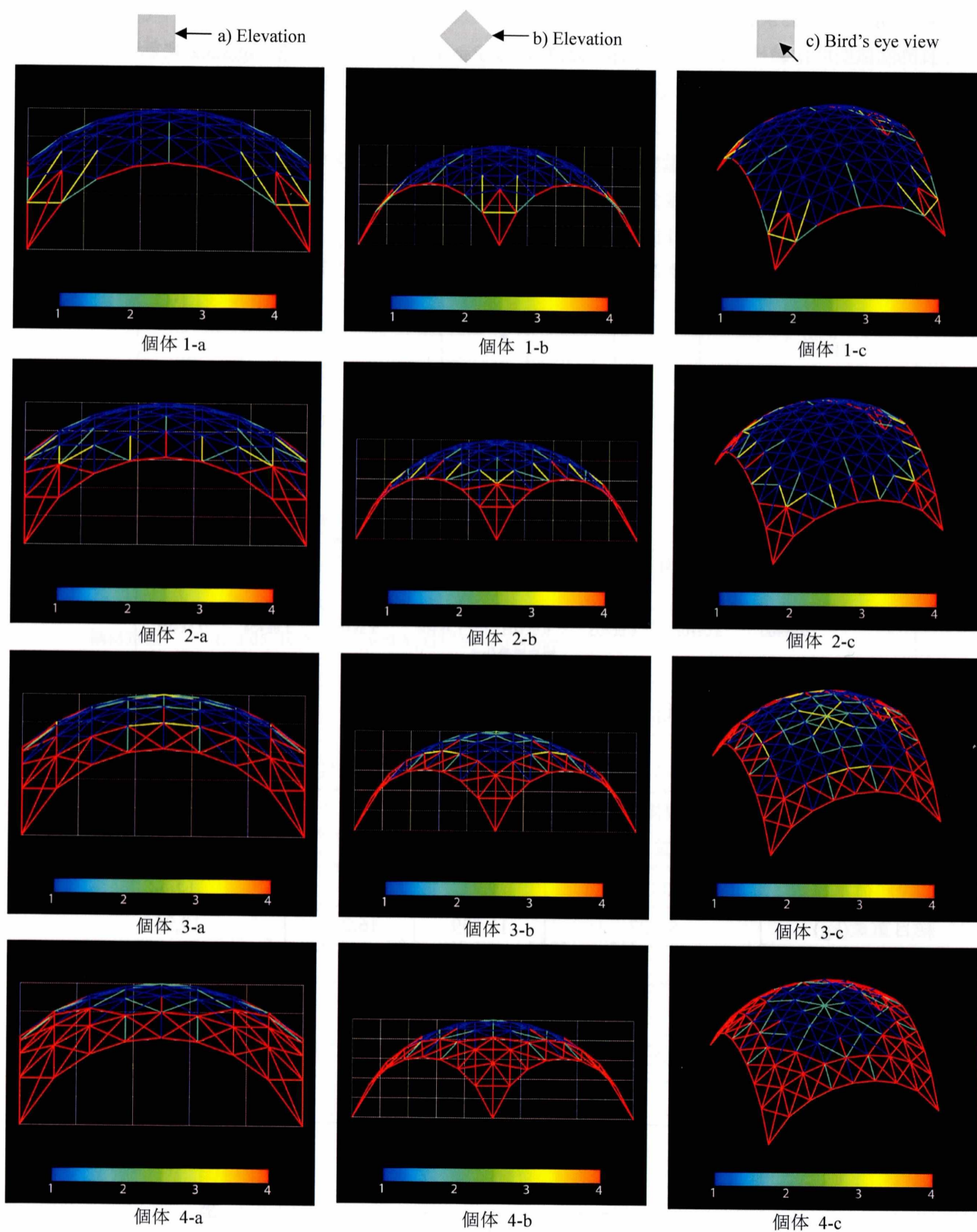


Fig.3.5.4 断面の比較 (部材の色は鋼材 No.を表す)

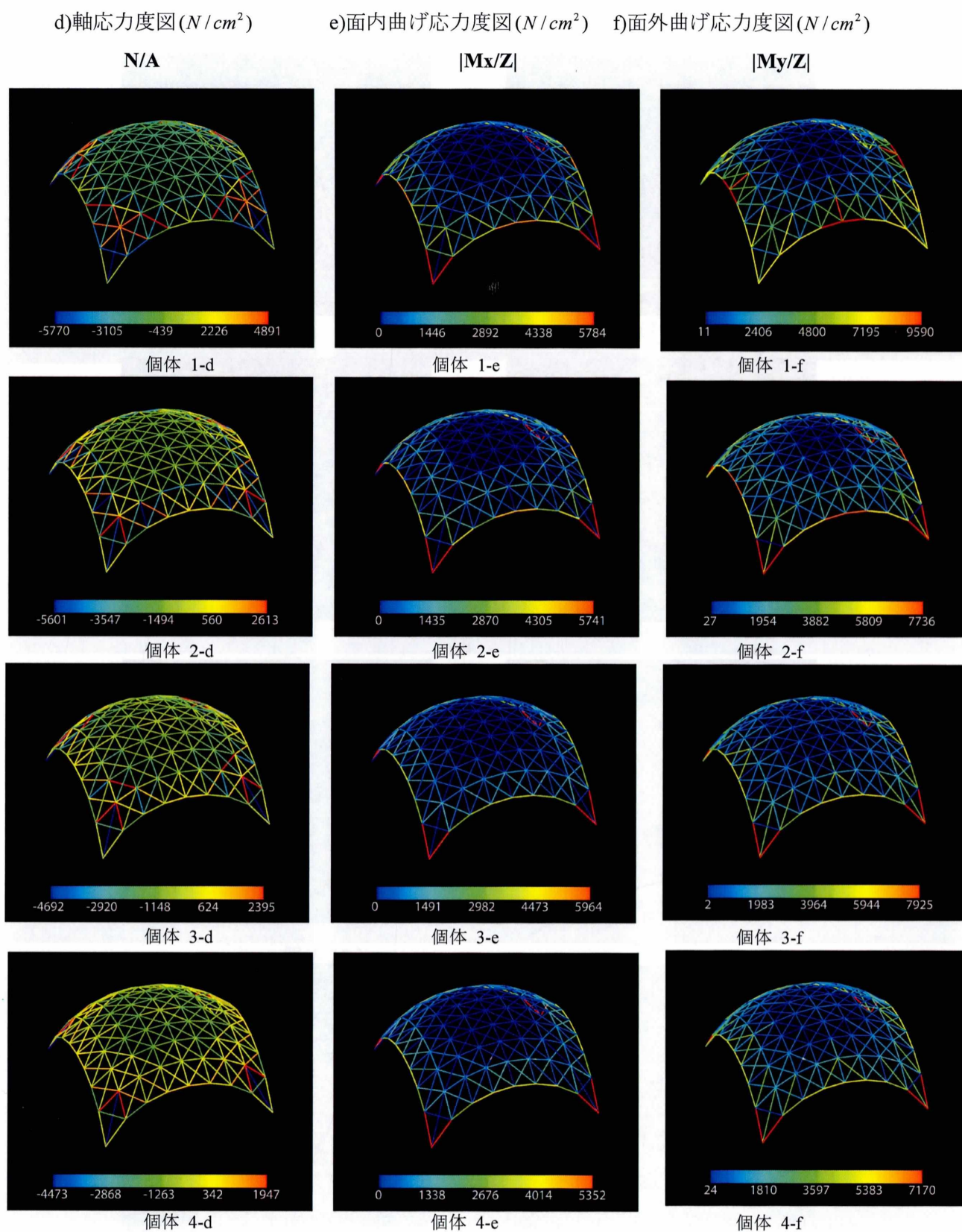


Fig.3.5.5 応力度分布

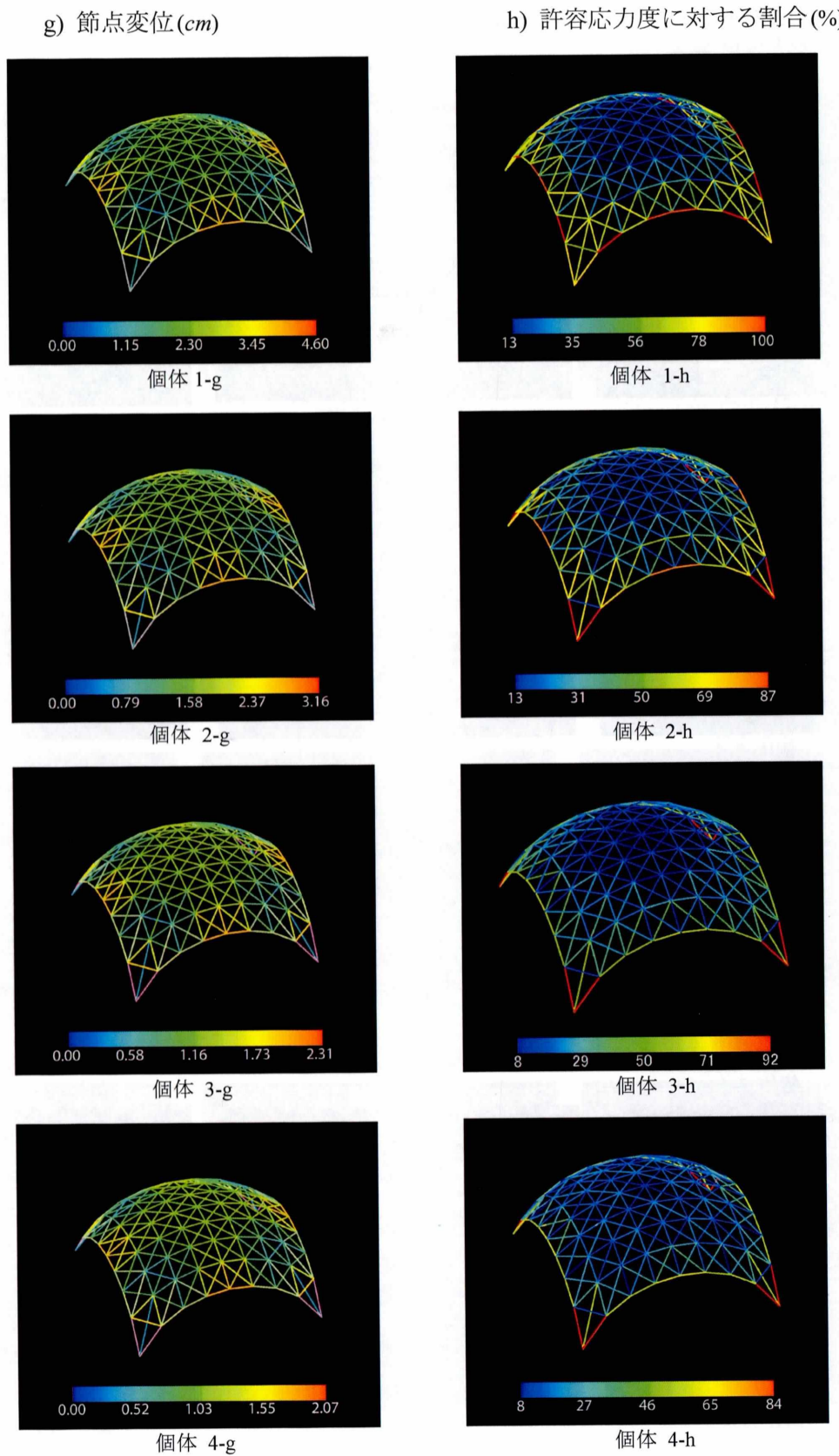


Fig.3.5.6 節点変位と許容応力度に対する割合

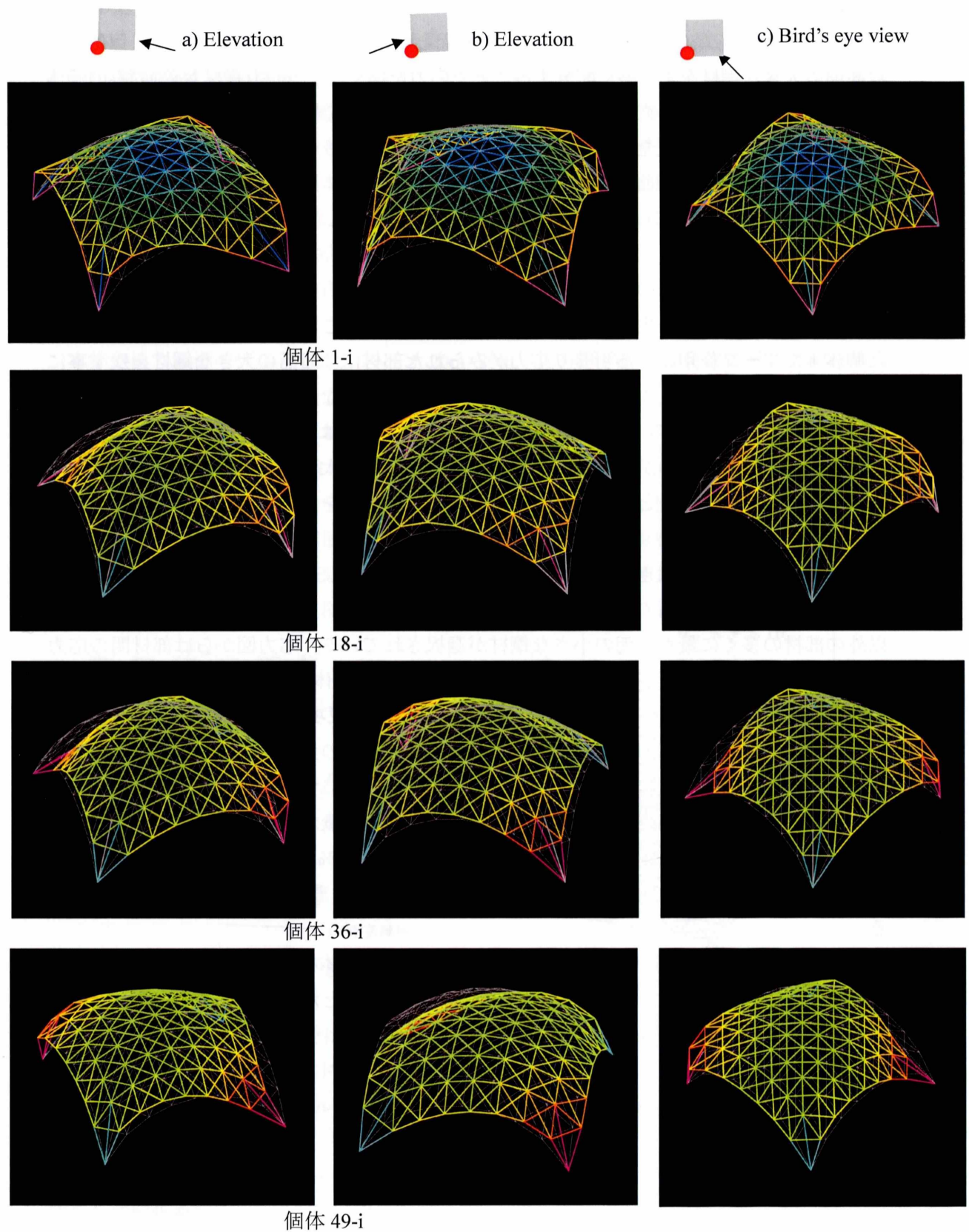


Fig3.5.7 1次座屈モード

形態の考察

Fig.3.3.4・Fig.3.3.5 から各比較個体の部材断面とその配置・応力を比較すると、個体1では断面の大きな鋼材をより多く配置することで応力を抑え、同一部材(鋼材 No.3)のみの個体に対して歪エネルギーの値は約 1/6 まで減少させているのが読み取れる(Table.3.3.4)。軸応力図からは裁断球殻の形状を維持するためのフープ作用によりリング状に引張り応力が働いているのが読み取れる。曲げ応力図からは自由端部とシェル脚部に応力が集中しているのが読み取れるが、全体として部材断面の大きな鋼材で抵抗しているため各応力の値は小さくなっており、節点変位も最大で 1cm 以下に抑えている。

個体2ではより発生応力の大きなシェル端部と支持点对角方向に断面の大きな部材を選択し、シェル中央部など発生応力の小さな部材では断面の小さな鋼材が選択されている。また個体1でフープ作用による引張り応力がみられた部材には断面の大きな鋼材を残す事により、応力の増加を抑えつつ効率よく総重量を軽量化させながら裁断球殻シェルの形状を保持できるように働いている。これにより、軸応力図からはフープ作用による軸応力の偏りが少なくなっているのが読み取れる。このように応力が大きく働く部材のみの断面を大きくすることで、個体1と比べても各応力や歪エネルギーを僅かな上昇に抑えつつ総重量は大幅に減少している。

個体3では発生応力の大きなシェル端部を最も断面の大きな部材で囲い、個体2と同様に支持点对角方向にも断面の大きな部材を選択しているが、総重量を軽量化するためにそれ以外の部材の多くに最も断面の小さな鋼材が選択されている。応力図からは部材間の応力の値にばらつきがみられるが、同一部材(鋼材 No.3)のみの個体と比べると総重量を約 1/2 まで減少させ、歪エネルギーの値も同時に減少させることに成功している。

個体4では、より発生応力の大きなシェル端部のみに断面の大きな部材を選択している。さらに、最も断面の大きな部材の使用をシェルの脚部のみにすることで総重量を大幅に減少させている。各部材の許容応力度の条件を満たし、総重量が軽量化された部材断面とその配置を求めた結果、許容応力度に対する割合は最大で 99%に達しており、歪エネルギーの値は同一部材(鋼材 No.3)のみの個体より増加しているが総重量は 1/2 以下まで減少している。

Fig3.5.7 より 1 次座屈モードをみると、例題1のように本研究で使用した裁断球殻シェルのライズは偏平なものと比較して高く設定されていることから、水平方向に倒れるように座屈モードが現れている。

3.6 例題 4

節点 Z 座標を変数とした線形座屈荷重係数および歪エネルギーの最適化問題

3.6.1 検討項目

本節では、高い剛性を備えなおかつ安定性に優れた形状を持つ構造物を得るため、線形座屈荷重係数および歪エネルギーの最適化問題について多目的最適化問題を扱う。また、得られた近似 Pareto 最適フロントの個体を比較検討する。変数を節点 Z 座標とし、荷重条件は例題 1、例題 2 および前節と同様に隅角部支持モデルに節点毎の支配面積に応じた荷重を作用させた場合の数値解析結果を示す。

3.6.2 解析モデル

本節で扱う解析モデルとして、スパン $20\text{m} \times 20\text{m}$ 、正方形平面、隅角部にピン支持を持つ形状の単層ラチスシェルで覆う場合について考える。グランドストラクチャーを Fig.3.6.1 に示す。なお、部材の接合はスパンを 8 分割した点を節点として剛接合とし、図中にて節点以外で交差して見える部材は接合されていないものとした。

節点 Z 座標の変域は支持点を除く全節点で、初期 Z 座標を 0m として、 $0\text{m} \leq Z \leq 10\text{m}$ とした。そして、節点 Z 座標は離散数として用いているため、分割点を 16 個とし 10m を 15 分割した 66.7cm が節点座標修正の最小単位となっている。また、使用部材は SN400 の円形鋼管とした。

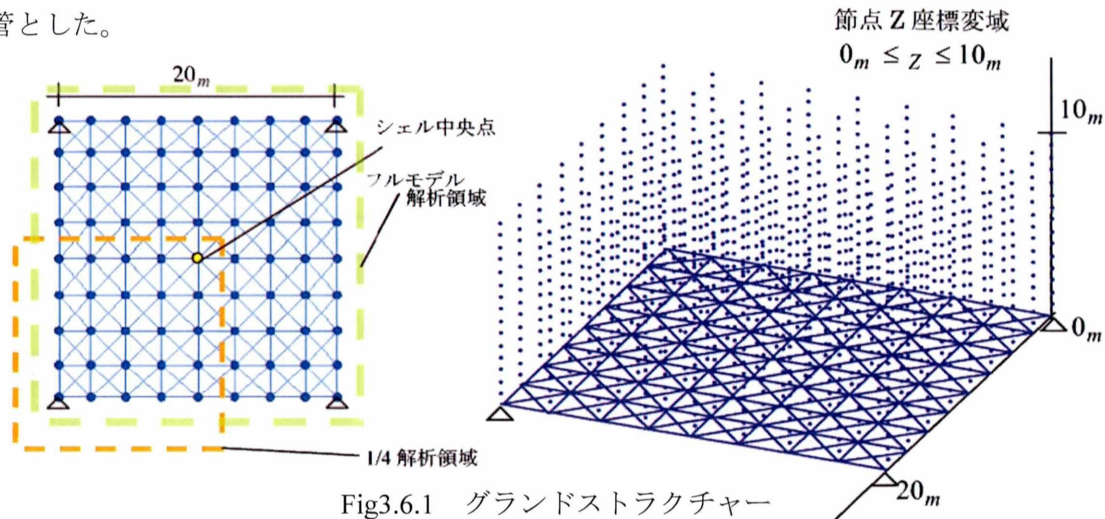


Fig3.6.1 グランドストラクチャー

また、例題 2 同様に本論では線形座屈荷重係数を目的関数とし、同時に解の 1 次座屈モードを求めている。座屈モードが全体系で現れることを考慮し、3 次元有限要素解析および線形座屈解析は 1/4 解析モデルとせずフルモデル解析領域で行うものとする。なお、GA 操作の点については第 2 章で述べたように節点 Z 座標の解析領域は 1/4 解析モデルとし、シェルの対称性を考慮して解析を行う。さらに節点 Z 座標の場合、NURBS を使用して制御点を減らして解析を行う。

3.6.3 解析条件

荷重条件は、前節同様 1/4 解析モデルに節点毎の支配面積に応じた荷重を作用させたものとした。荷重の大きさは実設計に応じて、一般の屋根の長期荷重 1.5kN/m^2 (約 150kg/m^2) とした。

解析条件は Table 3.6.1 を用いる。使用鋼材の断面性能を Table 3.6.3 に示す。本検討の制約条件は各部材の許容応力度の制限を満たすものとした。また step0 の初期形態を、Table 3.6.3 の鋼材 No.2 のみを選択したモデルに設定した。GA の操作(交叉と突然変異)では、乱数による一様交叉と多点突然変異を用いた。GA のパラメーターを Table 3.6.2 に示す。

Table 3.6.1 解析概要

形状条件	正方形平面：20m×20m 隅各部ピン支持
接合条件	剛接合
変域	$0\text{m} \leq Z \leq 10\text{m}$
制約条件	使用鋼材の許容応力度 100%
鋼材定数	$E=2.05 \times 10^5 \text{N/mm}^2$, $\nu=0.3$, $G=7.94 \times 10^5 \text{N/mm}^2$ E:ヤング係数, ν :ポアソン比, G:せん断弾性係数

Table 3.6.2 GA パラメーター

母集団個体数	270
エリート個体数	27
交叉率	50%~70%
突然変異率	0.5%~5%
世代数	3000
個体遺伝子長	36bit(Z 座表) 80bit(断面)

Table 3.6.3 断面性能

No.	ϕ (mm)	t (mm)	W_0 (kg/m)	A (cm^2)	I (cm^4)	Z (cm^3)	i (cm)
1	60.5	4.0	5.57	7.100	28.5	9.41	2.00
2	101.6	5.0	11.9	15.17	177	34.9	3.42
▶ 3	139.8	6.0	19.8	25.22	566	80.9	4.74
4	190.7	7.0	31.7	40.40	1710	179	6.50

以上の解析条件を元に、ラチスシェルの歪エネルギー最小化および線形座屈荷重係数の最大化問題の検討を行う。

3.6.4 解析結果および考察

目的関数空間における最終世代に得られた近似 Pareto 最適フロントを Fig.3.6.2 に示し、近似 Pareto 最適フロントの代表的な個体の解析結果を Table.3.6.4 に示す。また、解析時間は 3000 世代までに要した時間である。そして、世代毎の目的関数値最適個体の線形座屈荷重係数および全部材の総歪エネルギーの推移をそれぞれ Fig.3.6.3 にグラフとして示す。また、代表的な個体の部材断面、応力度分布、節点変位と許容応力度に対する割合の分布を Fig.3.6.4, Fig.3.6.5, Fig.3.6.6 に示す。

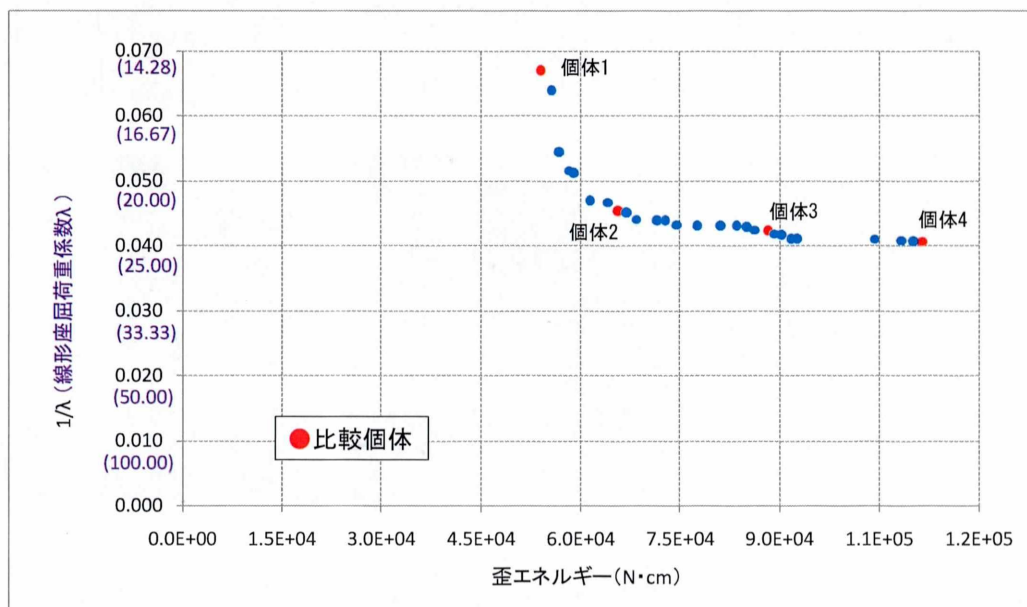


Fig.3.6.2 近似 Pareto 最適フロント

Table.3.6.4 Step 1 と比較個体の解析結果

	個体 1 (歪エネルギー量最小)	個体 2	個体 3	個体 4 (座屈荷重係数最大)
線形座屈荷重係数	14.95	22.08	23.64	24.63
歪エネルギー(N・cm)	5.405×10^4	6.569×10^4	8.825×10^4	11.143×10^4
解析時間	47h 14m 45s			

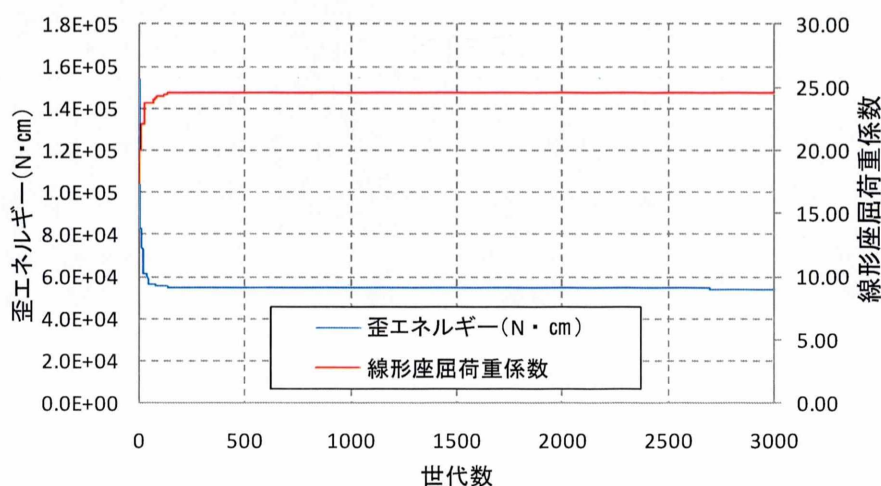


Fig.3.6.3 歪エネルギーおよび線形座屈荷重係数の推移

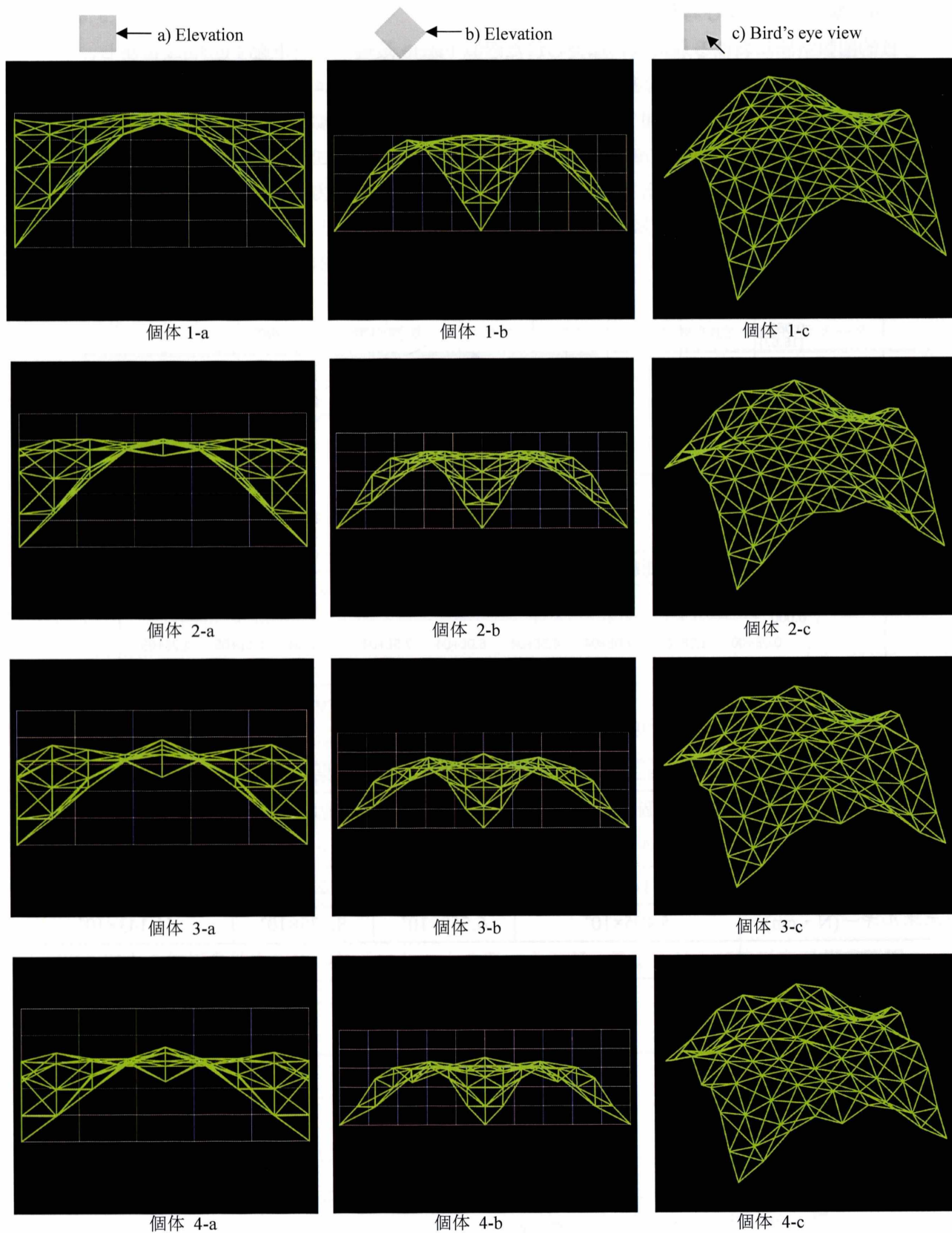


Fig.3.6.4 形状の比較

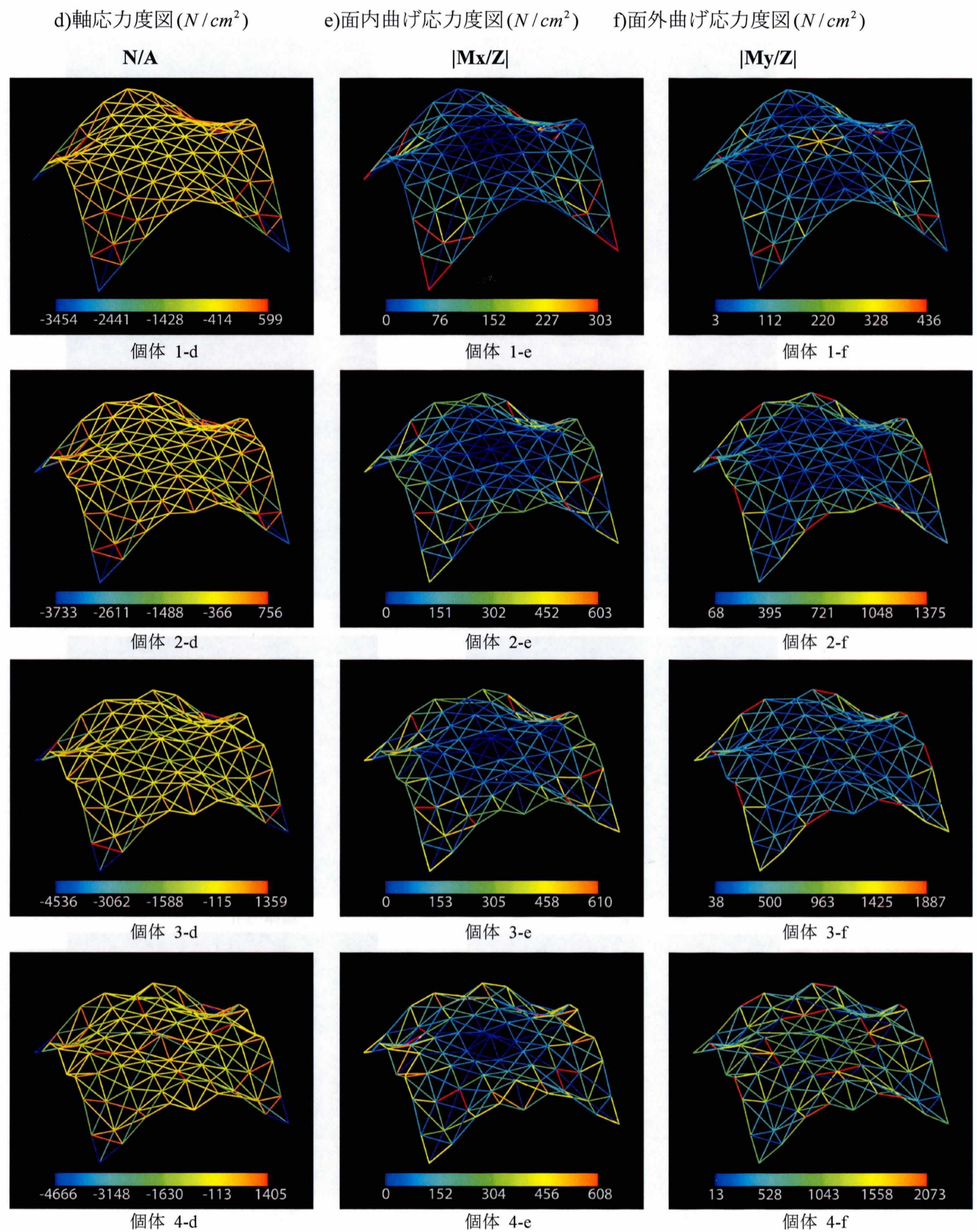
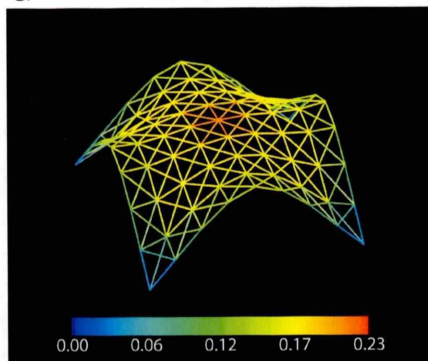
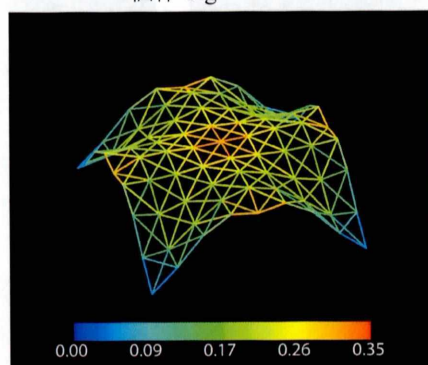


Fig.3.6.5 応力度分布

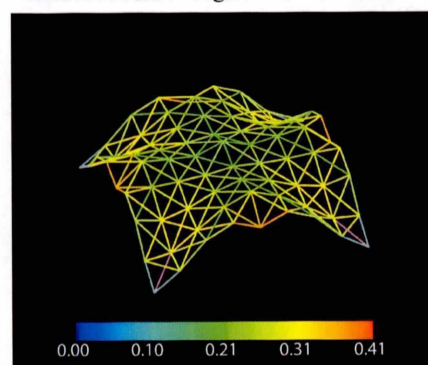
g) 節点変位 (cm)



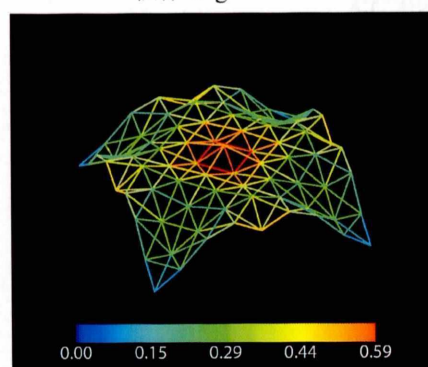
個体 1-g



個体 2-g

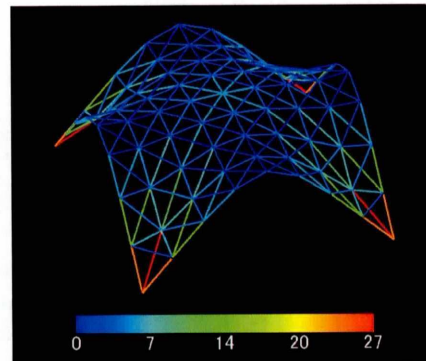


個体 3-g

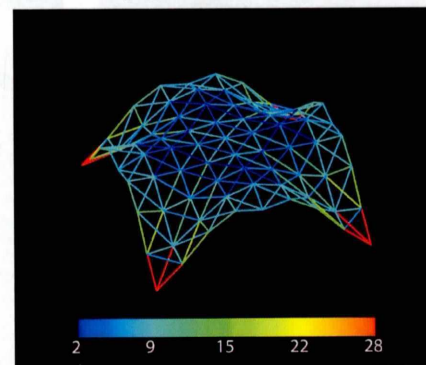


個体 4-g

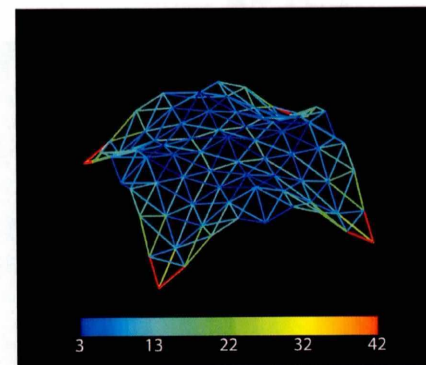
h) 許容応力度に対する割合 (%)



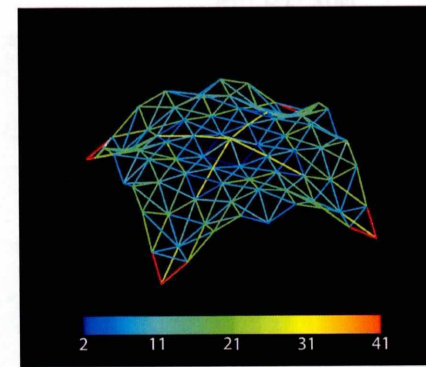
個体 1-h



個体 2-h



個体 3-h



個体 4-h

Fig.3.6.6 節点変位と許容応力度に対する割合

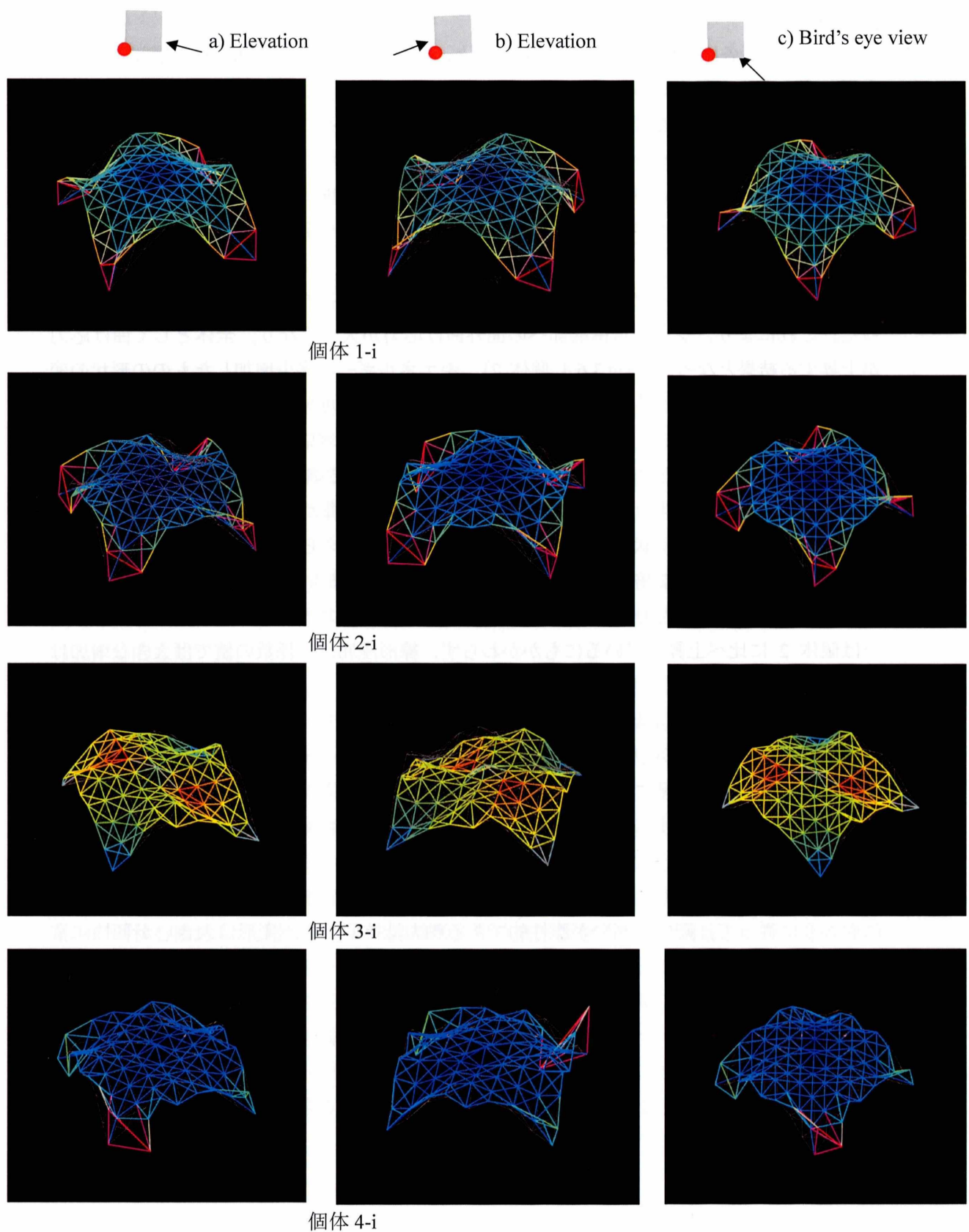


Fig3.6.7 1次座屈モード

形態の考察

Fig.3.6.4 から各比較個体の形状を比較すると、個体 1 ではシェル頂部と自由端部のライズを同じ高さまで上昇させることでシェル対角線上に谷を形成させ、この谷のような形状によって非常に剛な領域を形成し、シェル全体を補剛している。応力度分布をみると軸応力と面内曲げ応力はシェル脚部に集中しているが、値はかなり小さく抑えられている (Fig.3.6.5)。Fig.3.6.6 から節点変位は最大で 0.23cm、許容応力度に対する割合は最大でも 27% に抑えられている。歪エネルギーを最小化したことでシェル全体の剛性を高めた軸力抵抗型の形状といえる。

個体 2 では、個体 1 よりもライズを下げ、シェル自由端部を中心に折り曲げた形状となった。これにより、シェル自由端部への面外曲げ応力が大きくなり、全体として曲げ応力が上昇する結果となった (Fig.3.6.4_個体 2)。歪エネルギーは多少増加したものの形状の変化によって線形座屈荷重係数は個体 1 の値のおよそ 5 割程度増加し、より安定性が増したと考えられる。Fig.3.6.6 より節点変位は最大で 0.35cm、許容応力度に対する割合は最大で 28% となり、形状を修正することでほぼ変わらない値に抑えている。

個体 3 は個体 2 の形状からさらにシェル頂部周辺が折れ曲がるようになり、例題 2 と同様に折板構造のように形状修正し、座屈を防いでいると考えられる。応力度図をみると各応力値とも個体 1 に比べ 2 倍近くの値に増加している (Fig.3.6.4_個体 3)。そのため、許容応力度に対する割合は最大で 42% となり個体 1, 2 に比べて増加している。また、歪エネルギーは個体 2 に比べ上昇しているにもかかわらず、線形座屈荷重係数の値では大きな増加は見られなかった。

個体 4 では個体 3 の形状、応力度、変位、許容応力度に対する割合においてほぼ変わらない状態となった。線形座屈荷重係数の値についても形状の変化が落ち着いたことで個体 3 からの伸びはわずかに留まっている。面外曲げ応力度と変位に関しては、やはり増加の傾向がある。特に面外曲げ応力度では個体 1 と比較してシェル全体に大きな値が分布している (Fig.3.6.4_個体 4)。

全体として、個体 1 (歪エネルギー優良個体) から個体 4 (線形座屈荷重係数優良個体) に向かうに従って、剛性は高いが脆性的である軸力抵抗型から、変形は大きいが靱性に富む曲げ抵抗型へ形状が修正されていく傾向が確認できた。

今回の例題では解析時間の短縮を図るために、探索母集団を縮小し解析を行った。そのため、解の探索が十分でないことが考えられる。Fig.3.6.2 の近似パレート曲線を見ると、全体的に線形座屈荷重係数の値が優れた方へ偏っているのがわかる。今後、探索領域を広めることで歪エネルギー最小個体に関しては、おそらく非常に線形座屈荷重係数の小さい脆性的な解を得るのではないかと考えられる。

第4章

結語

4.1 総括

本論文ではラチスシェル構造物の全体座屈に着目し、主な目的関数に線形座屈荷重係数を設定し構造安定性を備えた構造物の形状最適化を行い得られた形状および力学性状について検討を行った。

第1章では、近年盛んに行われている構造形態創生手法の背景と構造物の座屈問題に対する既往研究、実建築物として応用されている形態デザイン手法を示し、それを受けて本研究の目的を述べた。

第2章では、本研究の理論準備として NURBS による形状表現、空間構造物における座屈問題、組合せ最適化理論として GA および多目的 GA について示した。さらに、解探索における効率化を目的とした並列化手法について示した。

第3章では、線形座屈荷重係数を目的関数とした例題を検証した。例題1では部材断面を変数とした線形座屈荷重係数の最大化問題を取り扱い、さらに汎用構造解析ソフトウェア Multiframe を用いて本研究プログラムの解の精度の確認を行った。例題2では節点 Z 座標を変数とした線形座屈荷重係数の最大化問題に取り組み、構造安定性を有するラチスシェルの形状を確認した。例題3, 4では線形座屈荷重係数を主な目的関数とし歪エネルギーと総自重との多目的最適化を行い、それぞれ節点 Z 座標と断面の2つのパラメータを変数とした数値解析を行った。それぞれの解析で得られた近似 Pareto 最適解の代表的な個体について比較・考察を行い、構造安定性を備えた形態の傾向について示した。

本論第3章で行った遺伝的アルゴリズムを用いた構造形態創生を Table.4.1 に示す。

目的関数 変数	単一目的	多目的	
	線形座屈荷重係数	線形座屈荷重係数	
		総自重	歪エネルギー
部材断面	例題 1	例題 3	-
節点 Z 座標	例題 2	-	例題 4

Table.4.1 本論における遺伝的アルゴリズムによる構造形態創生の研究

結論として、例題 1 および例題 3 の部材断面変数を扱った問題では制約条件の重量制限値に依存し、制限がない場合に線形座屈荷重係数における最適解は全部材で最大断面を選択する。例題 3 の総自重と多目的問題では全体座屈に対してどの程度までコスト削減をできるかなど設計者に対するひとつの目安となり得る可能性が考えられる。

次に例題 2 および例題 4 では節点 Z 座標を変数とし構造安定性を備えた形状について考察を行ったが、線形座屈荷重係数における最適解はいずれの例題でも低ライズでありシェル全体で折れ曲がるように形状を修正した。これはライズを低く保つことで水平方向の外力に対し安定性を確保し、さらに折板構造のように折れ曲がることで構造体として座屈へ抵抗するという傾向を示していると考えられる。また、応力度を見ても線形座屈荷重係数が大きくなるに従い面外曲げ応力がシェル全体で増加し、変形は生じるが靱性に優れた曲げ抵抗型へ進化する傾向が得られた。

4.2 今後の展望

本論では比較的単純な形状による構造形態の最適化問題を扱ったが、座屈性状は構造物の形状に大きく依存するため実建築物に応用するにあたり、より不定形な構造形態に対し適応でき、設計者の意図をより反映できる設計支援ツールとしての発展が望まれる。

ま、線形座屈荷重係数を求めるために用いた線形固有値解析は計算時間が非常にかかる。本論で行っている固有値解析手法は得られたそれぞれの剛性マトリクスをランチョス法により三重対角化しバイセクション法にて荒く固有値を求め、最後に逆べき乗法でそれより高精度の固有値(線形座屈荷重係数)と固有モード(線形座屈モード)求めている。これらの手順は固有値が得られるまで無限に反復されるため、固有値解析に対する並列化を行うことが有効であるといえる。

さらに、本質的な問題として非線形座屈問題について考慮することが考えられるが、本研究での GA を用いた最適化では解析時間が冗長化することが問題となる。よって、現実的には本研究で得られた線形座屈荷重係数の最適解に対して非線形座屈解析を行うことで解の検証をすることが有効であろう。

附録 A

有限要素解析における幾何剛性マトリクスの定式化

A.1 概説

ここでは、一般固有値問題における幾何剛性マトリクスについて示す。
 第 A.2 節では三次元梁要素の要素剛性マトリクス $[k_L]$ 、幾何剛性マトリクス $[k_G]$ を定式化する。

A.2 3次元梁要素の剛性マトリクスと幾何剛性マトリクス

A.2.1 要素剛性マトリクス

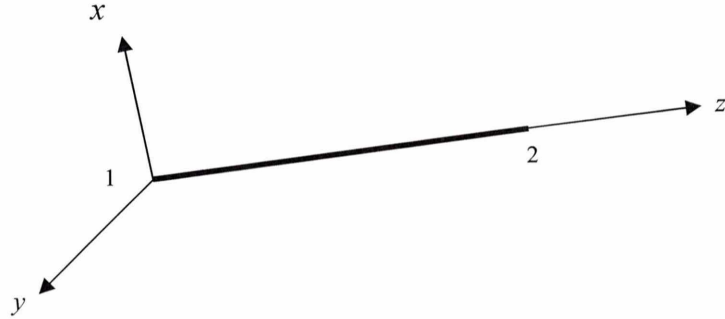


Fig.A.1 三次元梁要素

三次元梁要素の要素座標系での要素剛性マトリクスは次式のように表現することができる。要素座標系は Fig.A.1 のように材軸方向に z 軸，それと直行する平面内に x , y 軸をとる。

$$\{f\} = [k_L] \{\delta\} \quad (A.1)$$

$$\{f\} = \{f_{x1} \ f_{y1} \ f_{z1} \ m_{x1} \ m_{y1} \ m_{z1} \ f_{x2} \ f_{y2} \ f_{z2} \ m_{x2} \ m_{y2} \ m_{z2}\} \quad (A.2)$$

$$\{\delta\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{z2}\}^T$$

$$[k_L] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_{xx}}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{yy}}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & \frac{4EI_{yy}}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI_{xx}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{xx}}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GK}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12EI_{xx}}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{xx}}{l^2} & 0 & \frac{12EI_{xx}}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{yy}}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_{yy}}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & \frac{2EI_{yy}}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & \frac{4EI_{yy}}{l^3} & 0 & 0 \\ \frac{6EI_{xx}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{xx}}{l} & 0 & -\frac{6EI_{xx}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{xx}}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GK}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GK}{l} \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

ただし, f_{xi}, f_{yi}, f_{zi} はそれぞれの節点 i での x, y, z 方向の節点力, m_{xi}, m_{yi}, m_{zi} は x, y, z 軸回りの節点力モーメントであり, 変位成分としては x, y, z 方向の変位 u, v, w と x, y, z 軸回りの回転角 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ を考える。また, E はヤング係数, A は要素の断面積, l は要素長さ, I_{xx}, I_{yy} はそれぞれ x, y 軸に関する断面二次モーメント, G はせん断性係数, K は Saint-venant のねじり係数である。

A. 2. 2 幾何剛性マトリクス

仮想仕事の原理を用いて幾何剛性マトリクスは次のように求まる。記述のために幾何剛性マトリクスを次の式のように 4 つに分割する。

$$[k_G] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (A.4)$$

$$[k_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{12F_z I_{xx}}{Al^3} + \frac{6F_z}{5l} & \frac{12F_z I_{yy}}{Al^3} + \frac{6F_z}{5l} & \text{sym.} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12F_z I_{yy}}{Al^3} + \frac{6F_z}{5l} & \text{sym.} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F_z}{l} & \frac{4F_z I_{yy}}{Al} + \frac{2F_z l}{15} & \frac{6F_z I_{xx}}{Al^2} + \frac{F_z}{10} & \frac{6F_z I_{yy}}{Al^2} + \frac{F_z}{10} \\ 0 & -\frac{6F_z I_{xx}}{Al^2} - \frac{F_z}{10} & -\frac{M_{x1}}{l} & \frac{4F_z I_{yy}}{Al} + \frac{2F_z l}{15} & \frac{6F_z I_{xx}}{Al^2} + \frac{F_z}{10} & \frac{6F_z I_{yy}}{Al^2} + \frac{F_z}{10} \\ \frac{6F_z I_{xx}}{Al^2} + \frac{F_z}{10} & 0 & -\frac{M_{y1}}{l} & 0 & \frac{4F_z I_{xx}}{Al} + \frac{2F_z l}{15} & \frac{4F_z I_{yy}}{Al} + \frac{2F_z l}{15} \\ \frac{M_{x1}}{l} & \frac{M_{y1}}{l} & 0 & \frac{M_{y1} + M_{y2}}{6} & -\frac{M_{x1} + M_{x2}}{6} & \frac{F_z (I_{xx} + I_{yy})}{Al} \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

$$[k_{21}] = [k_{12}]^T = \begin{bmatrix} -\frac{12F_z I_{yy}}{Al^3} - \frac{6F_z}{5l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6F_z I_{xx}}{Al^2} - \frac{F_z}{10} & -\frac{M_{x1}}{l} \\ 0 & -\frac{12F_z I_{xx}}{Al^3} - \frac{6F_z}{5l} & 0 & \frac{6F_z I_{yy}}{Al^2} + \frac{F_z}{10} & 0 & -\frac{M_{y1}}{l} \\ 0 & 0 & -\frac{F_z}{l} & \frac{M_{x1}}{l} & \frac{M_{y1}}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6F_z I_{yy}}{Al^2} - \frac{F_z}{10} & -\frac{M_{x2}}{l} & \frac{2F_z I_{yy}}{Al} - \frac{F_z l}{30} & 0 & -\frac{M_{y1} + M_{y2}}{6} \\ \frac{6F_z I_{xx}}{Al^2} + \frac{F_z}{10} & 0 & -\frac{M_{y2}}{l} & 0 & \frac{2F_z I_{xx}}{Al} - \frac{F_z l}{30} & \frac{M_{x1} + M_{x2}}{6} \\ \frac{M_{x2}}{l} & \frac{M_{y2}}{l} & 0 & -\frac{M_{y1} + M_{y2}}{6} & \frac{M_{x1} + M_{x2}}{6} & -\frac{F_z (I_{xx} + I_{yy})}{Al} \end{bmatrix} \quad (A.6)$$

$$[k_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{12F_z I_{xx}}{Al^3} + \frac{6F_z}{5l} & \frac{12F_z I_{yy}}{Al^3} + \frac{6F_z}{5l} & \text{sym.} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12F_z I_{yy}}{Al^3} + \frac{6F_z}{5l} & \text{sym.} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F_z}{l} & \frac{4F_z I_{yy}}{Al} + \frac{2F_z l}{15} & \frac{6F_z I_{xx}}{Al^2} + \frac{F_z}{10} & \frac{6F_z I_{yy}}{Al^2} + \frac{F_z}{10} \\ 0 & \frac{6F_z I_{xx}}{Al^2} + \frac{F_z}{10} & \frac{M_{x2}}{l} & \frac{4F_z I_{yy}}{Al} + \frac{2F_z l}{15} & \frac{6F_z I_{xx}}{Al^2} + \frac{F_z}{10} & \frac{6F_z I_{yy}}{Al^2} + \frac{F_z}{10} \\ -\frac{6F_z I_{xx}}{Al^2} - \frac{F_z}{10} & 0 & \frac{M_{y2}}{l} & 0 & \frac{4F_z I_{xx}}{Al} + \frac{2F_z l}{15} & \frac{4F_z I_{yy}}{Al} + \frac{2F_z l}{15} \\ -\frac{M_{x2}}{l} & -\frac{M_{y2}}{l} & 0 & \frac{M_{y1} + M_{y2}}{6} & -\frac{M_{x1} + M_{x2}}{6} & \frac{F_z (I_{xx} + I_{yy})}{Al} \end{bmatrix} \quad (A.7)$$

ただし, F_z は部材に発生している軸力, M_{xi}, M_{yi} は i 節点に生じている曲げモーメントである。

附録 B

多目的遺伝的アルゴリズムの詳細

B.1 概説

ここでは、多目的遺伝的アルゴリズムに関する研究の流れを把握し、多目的遺伝的アルゴリズムにおける重要なスキームを明らかにする。

第 B.2 節では、MOGA(Multi-Objective Genetic Algorithm)についての詳細を、
第 B.3 節では、SPEA(Strength Pareto Evolutionary Algorithm) についての詳細をそれぞれ示す。

B.2 MOGA

1993 年に Fonseca らにより提案された MOGA (Multi-Objective Genetic Algorithm) は, Pareto 的概念を探索に用いたアルゴリズムである。MOGA では, 個体の評価として Pareto ランキング(Pareto ranking) 法を用いた評価方法を行っている。

Pareto ランキング法では, 個体 X_i が n_i 個の個体に優越されているとき, X_i のランク $r(X_i)$ を

$$r(X_i) = 1 + n_i \quad (\text{B.1})$$

のように定めることにしている。この手続きによるランキング例を Fig.B.1 に示す。なお, Fig.B.1 は最小化問題におけるランキングの例である。

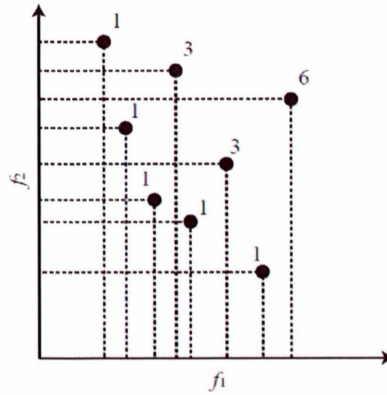


Fig.B.1: Pareto ランキングの概念

このランキング法を用いた選択手法としては, ランクの値を適合度に変換し用いるルーレット選択, 各世代で非劣個体 (ランク 1 の個体) のみ残す Pareto 最適個体保存選択などがある。

また, 非劣解集合の多様性保持のための手法として, Fonseca らは各ランク間においてニッチング(niching) を提案している。このニッチングは, シェアリング関数を用いる方法である。このシェアリング関数では, 設計変数空間での距離ではなく, 目的関数空間での距離を用いる。あるランクにおける個体 i と j 間の距離は, 次式により求まる。

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^M \left(\frac{f_k^i - f_k^j}{f_k^{\max} - f_k^{\min}} \right)^2} \quad (\text{B.2})$$

式(B.2) の f_k^{\max} , f_k^{\min} は, k 番目の目的関数値の最大値と最小値である。シェアリング関数を用いて $Sh(d_{ij})$ の値を求める。その後, ニッチカウントを下記の式によって求める。

$$nc_i = \sum_{j=1} \mu_{r_i} Sh(d_{ik}) \quad (\text{B.3})$$

式(2.6) における μ_{r_i} は, ランク r_i における個体の数を表している。

適合度割当て

MOGA における適合度割当ての流れを以下に示す。

Step1 各変数の初期化を行う。

$$\mu(j) = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{B.4})$$

$$i = 1 \quad (\text{B.5})$$

変数 $\mu(j)$ はランク j に属する個体数を保持する変数である。

Step2 個体 i を支配している個体の数 n_i を数え、個体 i のランク r_i を $r_i = 1 + n_i$ として計算する。また、ランク r_i が属する $\mu(r_i)$ を更新する。

Step3 $i < N$ ならば、 $i = i + 1$ を行い Step 2 へ戻る。そうでなければ Step 4 へ進む。

Step4 $\mu(r_i) > 0$ を満たす r_i からランクの最大値を求め r^* とする。ランク値を基準に個体のソートを行い、全ての個体に対する平均適合度割当てを式(2.9)に従い求める

$$F_i = N - \sum_{k=1}^{r_i-1} \mu(k) - 0.5(\mu(r_i) - 1) \quad (\text{B.6})$$

ランク $r_i = 1$ を持つ個体 i に対して、式(B.6)は $F_i = N - 0.5(\mu(1) - 1)$ の適合度を割当てる。この F_i 値は、 $\mu(1)$ の平均値であり、 N から $N - \mu(1) + 1$ までの連続する整数である。ランクカウンタを $r_c = 1$ に定める。

Step5 ランク r_c の各個体 i に対して、同じランクを持つ自分以外の個体からニッチカウントを計算する。この計算は、式(B.3)を用いる。ニッチカウントを用いて $F_j' = F_j / nc_j$ の変換を行う。同じ平均適合度を維持するため、次式のように割当て適合度をスケール化する。

$$F_j' \rightarrow \frac{F_j \mu(r_c)}{\sum_{k=1}^{\mu(r_c)} F_k'} F_j' \quad (\text{B.7})$$

Step6 もし $r_c < r^*$ ならば、 $r_c = r_c + 1$ を行い Step 5 へ。そうでなければ、この処理は終了する。

このように、ランク r_i の値が 1 に近い（低い）個体ほど高い適合度が割当てられ、ランク r_i の値が大きい（高い）個体ほど低い適合度が割当てられる。

利点

MOGA は、適合度割当てスキームがシンプルである。ニッチングが目的関数空間で行われるため、MOGA では連続問題だけでなく離散的な組み合わせ問題などに対しても容易に適用することができる。また、目的関数空間でのニッチングを行う MOGA は、目的関数空間における非劣解の広がりを求める場合に適した手法であるといえる。

欠点

個体間の支配関係が適合度割当てに用いられているものの、ランク 1 の非劣個体を除いて特定のランクに属する個体全てに同じ適合度を割り振る必要はない。これは、ある探索領域において幾つかの個体方向へ望まない偏りが生じる危険性を持っている。特に、このアルゴリズムでは Pareto 最適フロントの形、探索空間の個体密度に探索が影響されやすい。

また、MOGA における適合度の割当て計算では、よりランクの悪い解が、よりランクの良好な解に対して常により悪い適合度を割当てるとは限らない。そのため、より良好なランクの個体が混み合って存在した場合には、これらの個体に対するニッチカウントが大きくなり、ランクの低い個体の適合度がランクの高い個体の適合度よりも高くなる可能性がある。もし、このような逆転現象が生じた場合、より良好なランクを持つ全ての個体に対して適切な選択圧がかからなくなり、結果として収束の遅延、それ以上の探索が不可能となる。

B.3 SPEA

1999 年に Zitzler らによって提案された SPEA (Strength Pareto Evolutionary Algorithm) は、それまでに提案されてきた手法の幾つかのメカニズムに独自のメカニズムを組み込んだ手法である。SPEA において実装している既に提案されている手法から取り入れたメカニズムを以下に示す。

■探索過程において見つかった非優越解の保存（エリート主義アプローチ）

これは、単一目的遺伝的アルゴリズムにおけるエリート保存(elitist preserve) に相当する。探索過程において発見した非劣解を保存する方法。多くの手法では、探索個体群とは別に非劣解を保存するための個体群を使用する。一般に、この個体群のことをアーカイブ (archive) 個体群という。

■Pareto 最適解の概念に基づく適合度割当て

■非劣解集合の削減方法

非劣解の保存を行う場合、必要以上の非劣解集合が得られた場合、それらを削減する必要がある。対象となる全ての個体が非劣解であるため、一般には多様性の観点から優越を決定する。

一方、オリジナルの手法として以下のメカニズムの提案を行っている。

- ・ 独自の適合度割当て
- ・ 多様性維持のための新たなニッチ手法
- ・ 保存している非劣解集合の選択への参加

アルゴリズムの流れ

SPEA の全体的なアルゴリズムの流れを示す。

- Step1 初期探索母集団 P を生成, そして空のアーカイブ個体群 \bar{P} を生成。
- Step2 P における非劣個体を \bar{P} にコピーする。
- Step3 \bar{P} において, ランク 1 以外の個体を削除。
- Step4 もしも \bar{P} における個体数が, 前もって与えられた最大個体数 \bar{N} を越えていた場合, クラスタリングの手法によって \bar{P} の個体を削減する。
- Step5 \bar{P} における場合と同様に P における各個体の適合度を計算する。
- Step6 $P + \bar{P}$ の母集団より個体を選択する。この操作は, 必要個体数に達するまで続けられ, 新たな P を生成する。SPEA では, バイナリトーナメント選択を用いる。
- Step7 交叉や突然変異を P に対して適用する。
- Step8 もし, 世代が終了世代に到達していたならば終了, そうでなければ Step 2 へ。

上記から分かるように, SPEA ではアーカイブ個体群としてそれまでの探索において非優越である個体を保存し, 毎世代ごとにアーカイブ個体群を更新しながら探索を進めていく。SPEA では, 適合度の割当てとクラスタリングに関してオリジナルの手法を提案, 実装している。以下, 適合度の割当てとクラスタリングについて説明する。

適合度の割当て

SPEA の適合度の割当て手順は、2 つの段階により構成されている。

まず、アーカイブ個体群 \bar{P} における個体のランク付けを行い、その後、母集団（探索個体群） P のランク付けを行う。

Step1 アーカイブ個体群の各個体 $i \in \bar{P}$ に対しては、適合度値として $s_i \in [0, 1)$ の実数値が割当てられる。SPEA では適合度の概念に強度(strength) という単語を用いており、各個体に強度を割当て、それを適合度として用いている。 s_i は、探索母集団 P の総個体数 N および個体 i が支配している探索母集団 $j \in P$ の数 n により決定する。

$$s_i = \frac{n}{N+1} \quad (\text{B.8})$$

個体 i の適合度値は、 s_i と同値にする。

$$f_i = s_i \quad (\text{B.9})$$

Step2 探索母集団群の各個体 $j \in P$ の適合度値は、 j を優越している全てのアーカイブ個体 $i \in \bar{P}$ の s_i を足し合わせ求める。

$$f_j = 1 + \sum_{i, i \succ j} s_i \quad \text{where } f_j \in [1, N) \quad (\text{B.10})$$

式(B.10) において、左辺に 1 を足しているのは、 P の個体よりも \bar{P} の適合度値がより良いものとするためである。

上記の手順から分かるように、SPEA では適合度が最小化されている。そのため、より小さな適合度値を持っている個体が高い確率で選択される。Fig.B.2 に、SPEA における適合度割当ての概念図を示す。

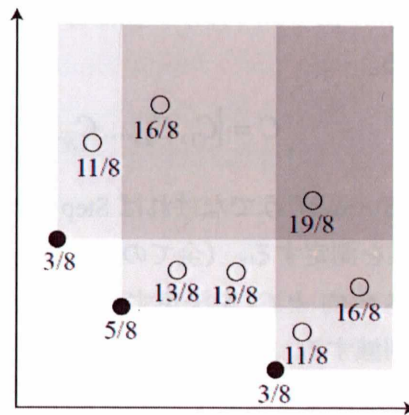


Fig.B.2: SPEA の適合度割当て

Fig.B.2 から分かるように、この手法では Pareto 最適フロントへの近さと個体間の密度の双方が考慮された適合度の割当てが実現されている。特に、適合度シェアリングとの違いについて見た場合、密度を求めるのに距離の概念を全く用いていないことがあげられる。そのため、 σ_{share} のような追加的なパラメータを用いる必要はない。

クラスタリングを用いた Pareto 集合の削減

SPEA では、アーカイブ個体群 \bar{P} の個体数 \bar{N} を越える非劣解が見つかった場合にクラスタリング(clustering) という手法を用いて非劣解の個体数が \bar{N} を越えないようにしている。今、非劣解集合 \bar{P} の個体数 \bar{N}' を \bar{N} へ削減する場合を考える($\bar{N}' > \bar{N}$)。まず、 \bar{P} における各個体は、異なるクラスタ(cluster) に属するものとする。従って、最初は \bar{N}' 個のクラスタが存在する。それから、全てのクラスタ同士の cluster-distance を測定する。一般に、クラスタ C_1 と C_2 の距離 d_{12} は、解の全てのペアのユークリッド距離によって求まる($i \in C_1, j \in C_2$)。

$$d = \frac{1}{|C_1| \cdot |C_2|} \cdot \sum_{i \in C_1, j \in C_2} d(i, j) \quad (\text{B.11})$$

SPEA では、目的関数空間を基に $d(i, j)$ を計算している。式(B.11) を用いた SPEA のクラスタリングの流れを以下に示す。

このクラスタ統合プロセスをクラスタの総数が \bar{N} 個になるまで繰り返す。クラスタの総数が \bar{N} 個になった時点で、各クラスタ内で他の個体に対して最小平均距離を持つ個体を選択し、残りの個体を全て削除する。

Step1 クラスタ集合 C を生成。 \bar{N}' 個のアーカイブ個体群の個体 $i \in \bar{P}$ は、それぞれ別のクラスタを構成している。

$$C = \{C_1, C_2, \dots, C_{\bar{N}'}\} \quad (\text{B.12})$$

Step2 もし $|C| \leq \bar{N}$ ならば Step 5 へ、そうでなければ Step 3 へ。

Step3 全てのクラスタ間の距離を測定する。(全てのペアは、 $|C|/2$ ある)

Step4 最小距離 d を持つクラスタ C_1 と C_2 を決定する。選択したクラスタ同士を統合し、クラスタの総数 C を 1 削減する。Step 2 へ。

Step5 各クラスタ内で他の個体に対して最小平均距離を持つ個体を選択し、その他の個体を削減する。

利点

SPEA の最大の利点は、探索性能が優れていることである。SPEA では、探索で見つかった優れた非優越解を失うことなく、探索へ反映させている。すなわち、探索において発見した非劣解の扱いが非常に優れている。これは、SPEA におけるクラスタリング手法とアーカイブ個体群の探索への参加に起因している。SPEA のクラスタリングでは、得られた非劣解集合に対してより一様に広がっているものを保存するようにしている。クラスタリングの効果については、幾つかの研究によりクラスタリングが解探索へ良い影響をもたらすことが確認されている。また、それらの非劣解集合を探索へ参加させることにより Pareto 最適フロントに対する収束性も向上させている。

欠点

SPEA では、新たなパラメータとしてアーカイブ個体の数 \bar{N} が追加された。現在の探索個体群の数 N とアーカイブ個体の数 \bar{N} のバランスは、SPEA の探索の成否に大きく影響する。もし、 N に対して非常に大きな \bar{N} を用いた場合、エリートの選択圧が大きくなり SPEA は Pareto 最適フロントに対して収束しなくなる可能性がある。一方、 N に対して \bar{N} が小さすぎた場合、エリート保存の効果が失われる。さらに、母集団における多くの解が、どのアーカイブ個体群の個体からも優越されず等しい適合度が割り振られる。SPEA の研究者らは、保存個体群と探索個体群のサイズ比を 1:4 として用いている。

[参考文献]

- [1] 佐々木睦朗：FLUX STRUCTURE,TOTO 出版 2005
- [2] ACTAR：VERB NATURES architecture boogazine 2007
- [3] AA Publications：MORPHO-ECOLOGIES 2006
- [4] AA Publications：MATHEMATICAL FORM 2006
- [5] 日本建築学会編：構造形態の解析と創生 応用力学シリーズ 5,丸善 1998
- [6] F・オットー他：自然な構造体,鹿島出版会 1986
- [7] 今野浩：整数計画法,講座・数理計画法 6,産業図書 1981
- [8] 久保幹夫：組み合わせ最適化とアルゴリズム,共立出版,2000
- [9] P. Hajela, E. Lee：Genetic Algorithms in Truss Topolpgical Optimization,Int. J. Solids Structures Vol.32, No.22, pp.3341-3357, 1995
- [10] 大森博司,鬼頭伸彰：遺伝的アルゴリズムを用いたトラス構造物の形態創出, 日本建築学会構造系論文集, 第 520 号, pp.85-92, 1996.6
- [11] 河村拓昌,大森博司：遺伝的アルゴリズムを用いた立体トラス構造物の形態創生, 日本建築学会構造系論文集, 第 538 号, pp.115-121, 2000,1
- [12] 河村拓昌,長田宗平,大森博司：遺伝的アルゴリズムによるフレーム構造物の位相設計 構造工学論文集 Vol.47B, pp.1-6, 2001.3
- [13] 三井和男,登坂宣好：遺伝的アルゴリズムの空間構造形態解析への応用, 日本建築学会構造系論文集, 第 484 号, pp.75-83,1996.6
- [14] 浜田英明,大森博司：設計者の選好と力学的合理性を勘案した自由曲面シェル構造の構造形態創生法の提案, 日本建築学会構造系論文集, 第 609 号, pp.105-111,2006.11
- [15] 新谷真人,安藤顕祐,佐藤慶太,永井拓生：建築計画を考慮した形態創生に関する基礎的研究, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 837-838, 2007.8
- [16] 日本建築学会編：構造形態創生の理論と応用 応用力学シリーズ 8,丸善 2001
- [17] 日本建築学会編：建築最適化への招待,丸善 2005
- [18] 北野宏明：遺伝的アルゴリズム,産業図書,1993
- [19] 伊庭斉志：遺伝的アルゴリズムの基礎—GA の謎を解く—,オーム社,1994
- [20] 藤谷義信：パソコンで解く骨組の力学,丸善 1993
- [21] 藤井大地：パソコンで解く構造デザイン,丸善 2002
- [22] 川面恵司 他：最適化理論の基礎と応用 コロナ社 2000
- [23] 三井和男,大崎純,大森博司,田川浩,本間俊雄：発見的最適化手法による構造のフォルムとシステム 計算工学シリーズ 4,コロナ社 2004
- [24] 牛島省：数値計算のための Fortran90/95 プログラミング入門,森北出版,2007.7
- [25] B.コルテ, J.フィーゲン：組合せ最適化 理論とアルゴリズム,シュプリンガー・フェアラーク東京 2005

- [26] 楠朝光,佐々木睦朗:NURBS 立体を用いた 3D 拡張 ESO 法による構造形態創生, 法政大学大学院修士論文, 2007.2
- [27] E.Ramm, G.Mehlhorn: On Shape Finding Methods and Ultimate Load Analyses of Reinforced Concrete Shells ,Eng. Struct., vol.13, pp178-198, 1991
- [28] E.Ramm: Shape Finding Methods of Shells,Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures(IASS),Vol.33,pp.89-99,1992
- [29] 古田均・杉本博之: 遺伝的アルゴリズムの構造工学への応用, 森北出版, 1997
- [30] 半谷裕彦: 計算力学と CAE シリーズ 5 形態解析 一般化逆行列とその応用, 培風館, 1991
- [31] 山川宏: 計算力学と CAE シリーズ 9 最適化デザイン, 培風館, 1993
- [32] 川面恵司・横山正明・長谷川浩志: 最適化理論の基礎と応用 -GA および MDO を中心にして-, コロナ社, 2000
- [33] 藤井大地、松本慎也、藤谷義信、菊池昇: グランドストラクチャー法による骨組構造物の位相最適化, 日本建築学会構造工学論文集 Vol.46B, pp.1-8, 2000.3
- [34] 藤井大地、鈴木克幸、大坪英臣: 最適化手法 CONLIN を用いた骨組構造物の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, 第 548 号, pp59-66, 2001.10
- [35] 大崎純: 遺伝的アルゴリズムに基づく不連続コスト関数を有する構造物の最適設計法, 日本建築学会構造系論文集, 第 464 号, pp119-127, 1994.10
- [36] 田川浩,大崎純: 一様部材断面積を有する平面トラスのトポロジー・節点位置同時最適化, 日本建築学会構造系論文集 第 521 号, pp73-80,1999.7
- [37] Hiroshi Ohmori,Hiroaki Kawamura,Nobuaki Kito : Automatic Structural Design of Truss Topologies, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.48, pp243-250, 1999
- [38] 河村拓昌、大森博司: 遺伝的アルゴリズムによる接合状態を考慮した離散体構造物の形態創生, 日本建築学会構造系論文集 第 555 号, pp121-128, 2002.5
- [39] 大森博司、早稲倉章吾、河村拓昌、石山達士: ファジイ理論に基づく不確定性を考慮した空間構造物の形態創生に関する研究, 日本建築学会構造系論文集 第 578 号, pp83-90, 2004.4
- [40] 大森博司、野田賢: 遺伝的アルゴリズムによる建築構造物のライフサイクルデザインに関する研究, 日本建築学会構造系論文集 第 601 号, pp181-188, 2006.3
- [41] 本間俊雄、野瑞憲太: 解の多様性を考慮した遺伝的アルゴリズムによる構造形態の創生, 日本建築学会構造系論文集 第 614 号, pp.35-43, 2007.4
- [42] 林康裕、護雅史: GA と樹形モデルを用いた制振構造物の創生的基本設計, 日本建築学会構造系論文集 第 480 号, pp.47-56, 1996.2
- [43] 高田富文、松岡貴士: 体積とコンプライアンスを目的関数としたトラス・トポロジー最適化問題への線形計画法の適用, 日本建築学会構造系論文集 第 598 号,pp.87-91,2005
- [44] 中西泰人: 選好関数を用いた対話型進化システムの制御と評価-GA のデザイン支援システムへの応用-, 人工知能学会誌, Vol.13, No.5, pp.704-701, 1998.1

- [45] Alberto PUGNALE, Mario SASSONE : Morhphogenesis and Structural Optimization of Shell Structures with the Aid of a Genetic Alogorithm
- [46] 高瀬淑也: GA を用いたラチスシェル構造物の形態デザイン手法に関する研究, 法政大学大学院修士論文 2007
- [47] 浜田英明:スプライン関数による自由曲面シェル構造の形態デザインに関する研究, 名古屋大学大学院修士論文 2005
- [48] 木村俊明:自由曲面シェル構造の形状と厚み分布の同時決定による構造形態創生に関する研究, 名古屋大学大学院修士論文, 2007
- [49] 坂和正敏:田中雅博 : 遺伝的アルゴリズム 朝倉出版 1995
- [50] 円酒昂: GA によるラチスシェル構造物の形状と部材を変数とした形態デザインに関する研究, 法政大学卒業論文, 2008
- [51] 棟朝雅晴:遺伝的アルゴリズム その理論と先端的手法, 森北出版, 2008
- [52] 川瀬優: 多目的 GA によるラチスシェル構造物の形態デザインに関する研究, 法政大学卒業論文, 2009
- [53] 小河利行, 大崎純, 立石理恵:線形座屈荷重最大化と部材長一様化を目的とした単層ラチスシェルの形状最適化, 日本建築学会構造系論文集, 第 570 号, pp.129-136, 2003.8
- [54] 小河利行, 桑田真理子:鉛直荷重を受ける剛接合単層ラチスドームの弾塑性座屈性状, 日本建築学会構造系論文集, 第 506 号, pp.131-138, 1998.4
- [55] 山本憲司, 皆川洋一, 大森博司:座屈荷重を目的関数とする空間構造の形状最適化に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, 第 564 号, pp.95-102, 2003.2
- [56] 日本機学会,シェルの振動と座屈ハンドブック,技報堂出版 2002
- [57] 陣沛山,川口衛,スペース・フレームの最大座屈荷重形態,日本建築学会構造系論文集,No489,pp41-46,1996
- [58]M.Feigen. minimum Weight of Tapered Round Thin-Walled Columns.J Apple Mech.Vol19.pp375-380,1952
- [59] F.Shanley.Weight strength Analysis of Aircraft Structures.1960
- [60]M.Zyczkowski and J.Kruzelecki. Optimal design of shells with Respect to their Stability.pp229-247,1975
- [61] I.Tadjbakhsh and J.B.Keller.Strongest Columns and Isoperimetric Inequalities for Eigenvalues. Vol29.pp159-614,1962
- [62]N.Olhoff and S.H.Rasmussen.On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns. Vol13.pp605-614,1977
- [63] V.N.Solodovnikov. Optimization of Elastic Shells of Revolution.Vol43.No3.pp535-544,1978
- [64]R.H.Plaut and N.Olhoff. Optimal Forms of Shallow Arches with Respect to Vibration and Stability .Vol11.No1.pp81-100,1983
- [65]R.H.Plaut and L.W.Johnson. Optimal Forms of Shallow Shells with Circular Boundary .Vol51.pp527-539,1984

謝辞

法政大学大学院に入学し、佐々木研究室で過ごした 2 年間は非常に学ぶべきことの多い日々でした。2 年という短い月日ではありましたが、自分にとって充実した研究生生活を送ることができたと感じています。本論文をこのような形で纏め上げることができたのも、多くの方々の暖かいご助言、ご協力のおかげであり、私一人では到底完遂するものではありませんでした。本当に感謝の気持ちで一杯です。

はじめに、法政大学教授 佐々木睦朗先生には、本論文の指導教授として、終始懇切丁寧なご指導、ご助言、ご鞭撻を賜り、感謝の言葉を申し上げます。研究に対する考え方、構造設計のみならず建築に対する考え方や何事にも真摯に向き合う姿勢など、多くのことを勉強させていただきました。大学院で佐々木先生の下で勉強することを選択し本当に良かったと思っています。心より厚く御礼申し上げます。

また、坪井義隆教授、吉田長行教授には大学院の講義などを通じ丁寧なご指導を頂いたことに対し深く感謝の意を申しあげます。そして、佐々木睦朗構造計画研究所の木村俊明様、ならびに高瀬淑也さんをはじめとする諸先輩方には大変お忙しい時間の合間を頂き丁寧なご助言を頂きました。心より御礼申し上げます。

また、設計データ、解析方法等を引用させて頂いた参考文献の著者の方々には、深く感謝致します。

そして同級生である大澤君、小林君、清水君、杉山君、高野君には大変お世話になりました。研究に対する多くの議論や助言などを頂き、互いに刺激を受け合い充実した 2 年間で共に過ごすことができたことに感謝しています。そして同じ研究班の後輩である円酒君、川瀬君をはじめとする佐々木研究室の後輩の皆様には研究に関する数々の議論、サポートや助言、日々の雑談など多くの接点を持つことができ、楽しい研究生生活を送ることができました。本当に感謝しています。ありがとうございました。

最後に、私をここまで育て、長い学生生活を多大な理解と協力をもっていつも支えてくれた尊敬してやまない父と母、そしていつも私を応援してくれました姉、兄、祖父母に深く、深く、感謝します。

2010 年 2 月
大竹 美智子

